y cada *u* sólo entrará una vez en cada horizontal por relación al subíndice

El resto de la demostración será, pues, el del caso general.

*Tercera.* Supongamos que algunos de los factores irreducibles de las ecuaciones

$$\psi = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0,\ S_4 = 0 \ldots..$$

sean iguales. Esto es lo mismo que suponer iguales varias raíces del grupo (2), porque dos ecuaciones irreducibles que tienen una raíz común son idénticas.

Supongamos, para fijar las ideas, que $S_h$, $S_k$ y $S_l$ tienen un mismo factor irreducible $S'_h = S'_k = S'_l$: es decir, que

$$S_h = S'_h . S''_h\ ;\ S_k = S'_k . S''_k\ ;\ S_l = S'_l . S''_l\ ;$$

ó, lo que es igual, que

$$S_h = S'_h\, S''_h\ ;\ S_k = S'_h\, S''_k\ ;\ S_l = S'_h\, S''_l\ .$$

El método es enteramente igual al anterior: en vez de la ecuación

$$\psi . S_2 . S_3 \ldots.. S_h . S_k . S_l \ldots.. S_p = \Psi,$$

es decir de

$$\psi . S_2 \ldots.. S'_h . S''_h \ldots.. S'_k . S''_k \ldots.. S'_l . S''_l \ldots.. S_p . = \Psi,$$

que tiene raíces repetidas, lo cual impide que la relación $Z_h - Z_k = 0$ sea absurda, se forma la ecuación de raíces desiguales:

$$\psi . S_2 . S_3 \ldots.. S'_h \ldots.. S''_h \ldots.. S''_k \ldots.. S''_l \ldots.. S_p = \Psi.$$

Esto supuesto, se aplica el teorema de Hermite á todas las raíces de $\psi$ y se suman los resultados; á todas las raíces de $S_2$ y se suman también; y así sucesivamente á $S_3$, $S_4$..., cuidando de sumar las ecuaciones que resulten de las raíces de $S'_h=0$, *primero* á los de $S''_h=0$, en *segundo* lugar á los de $S''_k=0$, y en *tercer* lugar á los de $S''_l=0$, con lo cual obtendremos una ecuación idéntica á la (3'').

Al variar el índice $i$ para todas las raíces de la nueva $\Psi=0$ repetiremos tres veces cada ecuación que proceda de valores de $i$ correspondientes á las raíces $S'_h=0$.

El resto de la demostración será idéntico al de la demostración principal; y, al deducir la determinante de las $u$, observaremos que, tanto como se reduce el número de horizontales por prescindir de valores iguales de $i$, se reducen las $u$ por cada horizontal, porque los tres grupos

$$N_h \Sigma u^i_{(Z'_h)} + N_k \Sigma u^i_{(Z'_k)} + N_l \Sigma u^i_{(Z'_l)}$$

se reducen á uno sólo

$$(N_h + N_k + N_l) \Sigma u^i_{(Z'_h)}$$

El método se aplicaría del mismo modo si alguna de las Z fuese nula.

## CONCLUSIÓN.

*Imposibilidad de la cuadratura del circulo con la regla y el compás.*

Formemos con $e^{z_1}, e^{z_2}, e^{z_3} \ldots e^{z_p}$, por raíces, siendo $z_1, z_2, z_3 \ldots z_p$ las raíces de una ecuación irreducible

$$z^p + b_1 z^{p-1} + b_2 z^{p-2} + \ldots\ldots b_p = 0,$$

la ecuación

$$V^p - M_1 V^{p-1} + M_2 V^{p-2} - M_3 V^{p-3} + \ldots\ldots \pm M_p = 0,$$

Tendremos evidentemente:

$$M_1 = e^{z_1} + e^{z_2} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \Sigma e^{z_k}$$

$$M_2 = e^{z_1 + z_2} + e^{z_1 + z_3} + \dots\dots = \Sigma e^{z_1 + z_2} \qquad = \Sigma e^{Z_2}$$

$$M_3 = e^{z_1 + z_2 + z_3} + e^{z_1 + z_2 + z_4} + \dots = \Sigma e^{z_1 + z_2 + z_3} = \Sigma e^{Z_3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$M_p = e^{z_1} \times e^{z_2} \times e^{z_3} \dots\dots = e^{z_1 + z_2 + z_3 + \dots\dots z_p} = e^{Z_p}.$$

De donde

$$V^p - \Sigma e^{z_k} \cdot V^{p-1} + \Sigma e^{Z_2} . V^{p-2} + \dots + e^{Z_p} = 0 \qquad (V).$$

Si $\pi\sqrt{-1}$ pudiese ser raíz de una ecuación irreducible de coeficientes enteros

$$z^p + b_1 z^{p-1} + b_2 z^{p-1} + \dots\dots + b_p = 0,$$

formando con $\pi\sqrt{-1}$, que sería una de las $z$, y con las restantes la ecuación (V), y poniendo en vez de V una de las raíces $e^{\pi\sqrt{-1}}$ de (V) tendríamos, puesto que $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$,

$$(-1)^p - (-1)^{p-1} \Sigma e^{Z_k} + (-1)^{p-2} \Sigma e^{Z_2} + \dots\dots e^{Z_p} = 0:$$

es decir, una relación lineal de coeficientes enteros entre $\Sigma e^{Z_k}$, $\Sigma e^{Z_2}$, $\Sigma e^{Z_3}$ ......: lo cual hemos demostrado que es imposible.

*Luego $\pi\sqrt{-1}$ no puede ser raíz de una ecuación irreducible de coeficientes enteros, en que el primer miembro tenga por coeficiente la unidad.*

Esto puede generalizarse: tampoco puede ser $\pi\sqrt{-1}$ raíz de una ecuación irreducible de coeficientes racionales, ó lo que es lo igual de coeficientes enteros de esta forma

$$b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + b_2 z^{p-2} + \dots + b_p = 0. \qquad (b)$$

En efecto, haciendo $z = \dfrac{y}{b_0}$, tendremos:

$$\frac{y^p}{b_0^{p-1}} + b_1 \frac{y^{p-1}}{b_0^{p-1}} + b_2 \frac{y^{p-2}}{b_0^{p-2}} \ldots + b_p = 0,$$

ecuación que evidentemente es también irreducible; ó bien

$$y^p + b_1 y^{p-1} + b_2 b_0 y^{p-2} \ldots + b_p b_0^{p-1} = 0. \qquad (b')$$

Si la ecuación (b) tuviese una raíz $\pi\sqrt{-1}$, la ecuación (b′) tendría una raíz $y = b_0 z = b_0 \pi\sqrt{-1}$.

Aplicando á (b′) el método anterior, y observando que $e^{b_0\pi\sqrt{-1}} = \pm 1$, puesto que $b_0$ es un número entero, llegaríamos al mismo absurdo que antes; á saber, á una relación lineal entre $\Sigma e^{y}$, $\Sigma e^{Y_2}$, $\Sigma e^{Y_3}$ .....

*Luego* $\pi\sqrt{-1}$ *no puede ser raíz de una ecuación de coeficientes racionales.*

Mas aun: $\pi$ no puede ser raíz de una ecuación cualquiera, que siempre podemos suponer irreducible, descomponiéndola en irreducibles y tomando aquella que contenga $(z - \pi)$.

En efecto, si $\pi$ es raíz de la ecuación irreducible

$$c_0 z^p + c_1 z^{p-1} + c_2 z^{p-2} + c_3 z^{p-3} + \ldots c_p = 0, \qquad (Z)$$

poniendo $\qquad z = \dfrac{y}{\sqrt{-1}}$, tendríamos

$$c_0 \frac{y^p}{(\sqrt{-1})^p} + c_1 \frac{y^{p-1}}{(\sqrt{-1})^{p-1}} + c_2 \frac{y^{p-2}}{(\sqrt{-1})^{p-2}} + \ldots + c_p = 0: \quad (Y)$$

ecuación que es evidentemente de la forma

$$d_0 y^p + d_1 y^{p-1} + d_2 y^{p-2} + \ldots d_p = 0,$$

con coeficientes del tipo $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

Pero si $\pi$ es raíz de (Z),

$$y = z\sqrt{-1} = \pi\sqrt{-1}$$

será raíz de Y, lo cual hemos probado que es imposible.

*Observación.* Lindemann dice en el *Comptes-rendus* que no sólo es imposible la relación

$$N_0 + N_1\Sigma e^{Z_k} + N_2\Sigma e^{Z_2} + N_3\Sigma e^{Z_3} + \ldots\ldots + N_p\Sigma e^{Z_p} = 0 \qquad (1)$$

cuando $N_0$, $N_1$, $N_2$ ..... $N_p$ son números enteros, sino cuando son irracionales algebráicos, es decir, raíces de ecuaciones irreducibles

$$\left.\begin{array}{l} t_0^n + B_1 t_0^{n-1} + B_2 t_0^{n-2} + \ldots\ldots \\ t_1^{n'} + B'_1 t_1^{n'-1} + B'_2 t_1^{n'-2} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (B)$$

siendo $B_1$, $B_2$ ..... $B'_1$, $B'_2$ ..... números enteros.

Me parece que podría esto demostrarse como sigue:

Supongamos que se llega á la ecuación

$$\omega^{P+1} + A_1\omega^P + A_2\omega^{P-1} + \ldots\ldots = 0. \qquad (\omega)$$

Los coeficientes $A_1$, $A_2$, $A_3$ ..... son funciones enteras de grados diversos de $N_0$, $N_1$, $N_2$, $N_3$ ..... y de coeficientes enteros formados por combinaciones de los coeficientes de $\Psi = 0$. Esto último es evidente, puesto que son funciones simétricas de $z_1$, $z_2$, $z_3$ ..... $z_p$.

Consideremos el sistema formado por la ecuación ($\omega$) y por el grupo B, poniendo en vez de $t_0$ la raiz $N_0$ de la primera ecuación de (B); en vez de $t_1$ la raíz $N_1$ de la segunda ecuación; y así sucesivamente.

Tendremos:

$$\begin{array}{l} \omega^{P+1} + A_1\omega^P + A_2\omega^{P-1} + \ldots\ldots = 0, \\ N_0^n + B_1 N_0^{n-1} + B_2 N_0^{n-2} + \ldots\ldots = 0, \\ N_1^{n'} + B'_1 N_1^{n'-1} + B'_2 N_1^{n'-2} + \ldots\ldots = 0, \\ N_2^{n''} + B''_1 N_2^{n''-1} + B''_2 N_2^{n''-2} + \ldots\ldots = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Supongamos que entre todas estas ecuaciones se eliminan $N_0$, $N_1$, $N_3$ .....: resultará una ecuación en $\omega$ de grado muy superior al $P+1$, porque ha de expresar todas las ecuaciones que resultarían de diversas combinaciones de las demás raíces del grupo (B) y no sólo la expresada en ($\omega$), que corresponde á la expresión lineal (1). Dicho grado será $(P+1).n.n'.n''...=Q$, y su forma

$$C_0\,\omega^{Q}+C_1\omega^{Q-1}+.....+C_{Q-3}\omega^3+C_{Q-2}\omega^2+C_{Q-1}\omega+C_Q=0 \quad (C)$$

en la cual $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$ ..... son números enteros, porque se obtienen por el método de las funciones simétricas de las raíces comunes al grupo (B).

Ahora bien, como uno de los grupos de raíces $t_0$, $t_1$, $t_2$... es precisamente $N_0$, $N_1$, $N_2$, $N_3$ ....., la ecuación (C) puede suponerse descompuesta de este modo:

$$\left[C_0\,\omega^{Q-P-1}+D_1\omega^{Q-P-2}+...+D_{Q-P-3}\omega^2+D_{Q-P-2}\omega+D_{Q-P-1}\right]$$
$$\times\left[\omega^{P+1}+A_1\omega^{P}+...+A_{P-2}\omega^3+A_{P-1}\omega^2+A_P\omega+A_{P+1}\right]=0;$$

ó representando los coeficientes finales por notaciones más sencillas, para simplificar,

$$\left[C_0\,\omega^{Q-P-1}+.....+d_3\omega^3+d_2\omega^2+d_1\omega+d_0\right]\times$$
$$\left[\omega^{P+1}+.....a_3\omega^3+a_2\omega^2+a_1\omega+a_0\right]=0.$$

Efectuando el producto tendremos:

$$C_0\,\omega^{Q}+.....+\left.\begin{array}{l} a_3d_0\\ +a_2d_1\\ +a_1d_2\\ +a_0d_3\end{array}\right|\omega^3+\left.\begin{array}{l} a_2d_0\\ +a_1d_1\\ +a_0d_2\end{array}\right|\omega^2+\left.\begin{array}{l} a_1d_0\\ +a_0d_1\end{array}\right|\omega+d_0a_0=0.$$

Comparando esta ecuación con la (C), sólo distinta de ellas por la forma, resultará:

$$C_Q = d_0 A_{P+1}$$
$$C_{Q-1} = d_0 A_P + d_1 A_{P+1}$$
$$C_{Q-2} = d_0 A_{P-1} + d_1 A_P + d_2 A_{P+1}$$
$$C_{Q-3} = d_0 A_{P-2} + d_1 A_{P-1} + d_2 A_P + d_3 A_{P+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pero, á medida que *m* crece, las P raíces de la ecuación $\omega$ tienden hacia *cero:* luego los P últimos términos de (C) tenderán hacia cero también para que (C) contenga, ó tienda á contener, P raíces nulas. De aquí se deduce que

$$C_Q,\ C_{Q-1},\ C_{Q-2} \ldots\ldots C_{Q-(P-1)}$$

tienden indefinidamente hacia cero; pero *son enteros*, luego son rigorosamente nulos. Por lo tanto, tendremos sucesivamente

$$A_{P+1} = 0,\ A_P = 0,\ A_{P-1} = 0 \ldots\ldots$$

como en el caso en que $N_0$, $N_1$, $N_2$, ..... eran enteros.

En la *discusión*, para examinar el caso en que $d_0$ ó $d_1$ etc., sean nulas, no parece necesario detenerse después de cuanto sobre la materia queda expuesto, y porque además sólo se trata de *indicar* un método posible de demostración, sin penetrar en el fondo del problema.

# II.

# MÉTODO DE WANTZEL

## para conocer si un problema puede resolverse con la recta y el círculo.

---

El Teorema de Lindemann sobre la rectificación de la circunferencia supone el conocimiento de algunos teoremas de Wantzel, comprendidos en una memoria que se publicó en el *Journal* de Liouville del año 1837, y de la cual vamos á dar una idea, ampliándola y explicándola en sus detalles más importantes. Creemos, en efecto, conveniente, para facilitar la inteligencia del interesante asunto que en ella se expone, variar algo la forma adoptada por dicho autor, sobrado concisa para buen número de nuestros lectores.

De los problemas que pueden resolverse con la recta y el círculo.—Para que un problema se resuelva por la recta y la circunferencia de círculo es necesario y suficiente, que todos y cada uno de los puntos que encadenan los datos con el resultado, y en que han de irse apoyando las construcciones, se determinen de una de estas tres maneras:

1.° Por intersección de rectas;

2.° Por la intersección de una recta y una circunferencia;

3.° Por la intersección de dos circunferencias.

Examinemos estos tres casos separadamente.

1.° Por intersección de rectas.—Tomando dos ejes coordenados rectangulares, las ecuaciones de ambas rectas serán

$$y = a\,x + b$$
$$y = a'x + b';$$

y las ordenadas del punto buscado, la x, por ejemplo, vendrá dada por la siguiente ecuación:

$$(a - a')\,x + b - b' = 0:$$

ó bien

$$x = -\frac{b - b'}{a - a'}:$$

es decir por una *expresión racional* de a, a', b, b': funciones conocidas de los datos y de cantidades determinadas por construcciones anteriores.

Lo que se ha dicho de x pudiera decirse de y.

2.° Por la intersección de una recta y de una circunferencia.—Las ecuaciones de ambas líneas serán:

$$y = a\,x + b$$
$$(y - y')^2 + (x - x')^2 = r^2;$$

y el valor de x se determinará eliminando y. Tendremos, pues:

$$(a\,x + b - y')^2 + (x - x')^2 = r^2:$$

ó bien

$$a^2\,x^2 + 2\,a\,(b - y')\,x + (b - y')^2 + x^2 - 2\,x\,x' + x'^2 = r^2;$$

de donde

$$(a^2 + 1)\,x^2 + 2\,(a\,b - a\,y' - x')\,x + (b - y')^2 + x'^2 - r^2 = 0:$$

ecuación de segundo grado en x, de la forma

$$x^2 + A\,x + B = 0:$$

en la cual A y B son funciones racionales de los datos y de cantidades conocidas por construcciones anteriores, es decir, de a, b, x', y', r.

Otro tanto pudiera decirse de y.

3.° Por la intersección de dos circunferencias.—Representemos por

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2$$
$$(x - x'')^2 + (y - y'')^2 = r'^2$$

las ecuaciones de ambas líneas, y determinemos x.

Restando una de otra, resultará

$$2x(x'-x'')+2y(y'-y'')-x'^2+x''^2-y'^2+y''^2+r^2-r'^2=0;$$

ecuacion de primer grado en x, y cuyos coeficientes son funciones racionales de $x'$, $y'$, $x''$, $y''$, $r$, $r'$.

Esta ecuación, combinada con una de las anteriores, resuelve el problema y reduce el tercer caso al segundo, puesto que se trata ya de la intersección de una circunferencia y una recta.

Resulta de todo lo expuesto que las coordenadas de un punto cualquiera del problema, lo mismo de uno de los intermedios, que de los puntos definitivos, dependen de una ecuación general de segundo grado en x (si se trata de la abscisa):

$$x^2+Ax+B=0,$$

cuyos coeficientes A, B *serán funciones racionales, fraccionarias en general, de los datos y de las coordenadas de los puntos ya determinados por construcciones anteriores.*

Esta función de segundo grado podrá ser de primero y reducirse á $Cx+D=0$, en el primer caso considerado.

Observación importante.—Aunque cada punto intermedio de la serie de construcciones, así como los puntos definitivos, dependen de dos coordenadas, x, y, como estas cantidades están en todos los casos enlazadas por ecuaciones de primer grado, siempre podremos suponer eliminadas las y, con lo cual las únicas incógnitas del problema serán las abscisas x de la serie de puntos.

Podemos, pues, prescindir en lo que sigue de la cantidad y, y no considerar más que la serie de las x para todos los puntos del encadenamiento de construcciones.

*Consecuencia final.*—La incógnita $x_1$ del primer punto que se determine dependerá generalmente de una ecuación

$$x_1^2+Ax_1+B=0,$$

en la cual A y B serán *funciones racionales* de los datos p, q, r..., pudiendo ser en algún caso esta ecuación de primer grado.

Del mismo modo la segunda incógnita $x_2$ dependerá de una ecuación

$$x_2^2 + A_1 x_2 + B_1 = 0,$$

en la cual A y B serán *funciones racionales* de p, q, r... $x_1$; es decir, de los datos y de la incognita anterior $x_1$.

El tercer punto $x_3$ vendrá dado por una ecuación

$$x_3^2 + A_2 x_3 + B_2 = 0,$$

en la cual $A_2$ y $B_2$ serán *funciones racionales* de los datos p, q, r... y de las dos incógnitas $x_1$, $x_2$, ya determinadas.

Y, en general, la incógnita $x_m$ dependerá de una ecuación de segundo grado (que á veces podrá ser de primero)

$$x_m^2 + A_{m-1} x_m + B_{m-1} = 0,$$

en la cual los coeficientes $A_{m-1}$ y $B_{m-1}$ serán funciones racionales de los datos p, q, r... y de las incógnitas anteriores, ya determinadas, $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... $x_{m-1}$.

Por último, aparecerá la verdadera incógnita del problema $x_n$ en una ecuación de segundo grado

$$x_n^2 + A_{n-1} x_n + B_{n-1} = 0,$$

cuyos coeficientes $A_{n-1}$ y $B_{n-1}$ serán funciones racionales de los datos p, q, r... y de las incógnitas intermedias $x_1$, $x_2$, $x_3$ ... $x_{n-1}$.

Verdad es que alguna de dichas ecuaciones podrá ser de primer grado y de la forma

$$A_{s-1} x_s + B_{s-1} = 0,$$

siendo $A_{s-1}$ y $B_{s-1}$ funciones racionales de los datos p, q, r... y de las incógnitas anteriores $x_1$, $x_2$... $x_{s-1}$; pero en este caso podemos despejar $x_s$ de dicha ecuación y sustituir su valor en todas las ecuaciones restantes, con lo cual no habrán dejado de ser funciones racionales de $x_1$, $x_2$, $x_3$... todos los coeficientes, ni dejarán de ser de segundo grado las ecuaciones que lo sean, y se habrá disminuído una ecuación, desapareciendo la incógnita intermedia $x_s$.

De aquí se deduce, como consecuencia final, que todo problema susceptible de ser resuelto por rectas y circunferencias depende de una serie de ecuaciones de segundo grado de esta forma:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^2 + A\,x_1 + B = 0 \\
x_2^2 + A_1 x_2 + B_1 = 0 \\
x_3^2 + B_2 x_3 + B_2 = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{n-1}^2 + A_{n-2} x_{n-1} + B_{n-2} = 0 \\
x_n^2 + A_{n-1} x_n + B_{n-1} = 0
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Todas las ecuaciones de primer grado habrán desaparecido como queda dicho, y podremos además suponer *que el número de estas ecuaciones es el* MENOR POSIBLE, *ó que se ha planteado el problema en forma correcta, eliminando las incógnitas inútiles.* En estas ecuaciones la significación de cada letra es la ya explicada, y el subíndice de las A, B, indica las incógnitas intermedias que estas funciones contienen;

$x_1$, $x_2$, $x_3$ ... $x_n$ es la serie de incógnitas, por el orden en que se van determinando, hasta llegar á la verdadera incógnita del problema, ó sea á $x_n$;

p, q, r... son los datos; y

A, B son funciones racionales de p, q, r...

$A_1$, $B_1$ funciones racionales también de p, q, r... $x_1$

$A_2$, $B_2$ de p, q, r... $x_1$, $x_2$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$A_{n-1}$, $B_{n-1}$ de p, q, r... $x_1$, $z_2$, $x_3$... $x_{n-1}$

SIMPLIFICACIÓN DE LOS COEFICIENTES A, B.—Cada uno de estos coeficientes es, según hemos demostrado, una *función racional*, en general fraccionaria, de los datos p, q, r... y de las incógnitas anteriores á la ecuación de que dicha cantidad A ó B forma parte.

*Primera simplificación.*—Consideremos uno de ellos, $A_m$, por ejemplo: lo que de él digamos se podrá decir de todos los restantes.

$A_m$ será en general fraccionario, y el numerador y el denominador serán polinomios enteros de p, q, r... $x_1$, $x_2$, $x_3$... $x_m$. Uno de estos polinomios, ordenados por relación á $x_m$, tendrá la forma

$$S_0 x_m^s + S_1 x_m^{s-1} + S_2 x_m^{s-2} + \ldots\ldots + S_s \ldots\ldots (S)$$

siendo $S_0$, $S_1$, $S_2$... funciones enteras de p, q, r... $x_1$, $x_2$, $x_3$... $x_{m-1}$; pero como existe la relación anterior á la

$$x_{m+1}^2 + A_m x_{m+1} + B_m = 0,$$

en que entran $A_m$ y $B_m$; es decir, la relación

$$x_m^2 + A_{m-1} x_m + B_{m-1} = 0,$$

siendo $A_{m-1}$ y $B_{m-1}$ funciones racionales de p, q, r... $x_1$, $x_2$... $x_{m-1}$, es evidente que, sustituyendo

$$x_m^2 = - A_{m-1} x_m - B_{m-1} \text{ en } S_0 x_m^s + S_1 x_m^{s-1} + \ldots + S_s$$

cuantas veces sea preciso, se irá rebajando en esta última el grado s de mitad en mitad en las potencias pares, y en las potencias impares, disminuídas en una unidad, de mitad en mitad también. Por ejemplo $x_m^6$ se convertirá en $(x_m^2)^3 = (-A_{m-1} x_m - B_{m-1})^3$: es decir en un polinomio de tercer grado; y asimismo $x_m^7 = x_m x_m^6 = x_m(-A_{m-1} x_m - B_{m-1})^3$, en un polinomio de cuarto grado.

En resumen: el polinomio (S) se reducirá á una expresión de primer grado en $x_m$.

Lo mismo puede decirse del denominador: con lo cual resulta que todos los coeficientes, $A_m$, $B_m$, por ejemplo, serán de esta forma, después de efectuar las debidas operaciones:

$$A_m \text{ ó } B_m = \frac{C_{m-1}x_m + D_{m-1}}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}},$$

siendo $C_{m-1}$, $D_{m-1}$, $E_{m-1}$, $F_{m-1}$ funciones racionales y enteras de p, q, r... $x_1$, $x_2$... $x_{m-1}$, que para indicar que contienen hasta $x_{m-1}$ llevan el subíndice (m —1.)

SEGUNDA SIMPLIFICACIÓN. Pero aun pueden simplificarse más estas cantidades A, B, y tomar forma entera en $x_m$.

Dividiendo $x_m^2 + A_{m-1}x_m + B_{m-1}$ por $E_{m-1}x_m + F_{m-1}$ tendremos

$$x_m^2 + A_{m-1}x_m + B_{m-1} = 0 = [E_{m-1}x_m + F_{m-1}] \times$$

$$\left[\frac{1}{E_{m-1}}x_m + \left(A_{m-1} - \frac{F_{m-1}}{E_{m-1}}\right)\frac{1}{E_{m-1}}\right] + B_{m-1} - \left(A_{m-1} - \frac{F_{m-1}}{E_{m-1}}\right)\frac{F_{m-1}}{E_{m-1}};$$

y como todas las cantidades que llevan el subíndice m—1 son funciones racionales de p, q, r... $x_1$... $x_{m-1}$ podremos abreviadamente escribir

$$0 = [E_{m-1}x_m + F_{m-1}]\,[G_{m-1}x_m + H_{m-1}] + L_{m-1},$$

de donde

$$\frac{1}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}} = -\left(\frac{G_{m-1}}{L_{m-1}}x_m + \frac{H_{m-1}}{L_{m-1}}\right):$$

con lo cual hemos sustituído á la expresión lineal del denominador otra de forma entera en $x_m$.

Resultará, pues, esta expresión:

$$\frac{C_{m-1}x_m + D_{m-1}}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}} = (C_{m-1}x_m + D_{m-1})\frac{1}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}}$$

$$= -(C_{m-1}x_m + D_{m-1})\left(\frac{G_{m-1}}{L_{m-1}}x_m + \frac{H_{m-1}}{L_{m-1}}\right);$$

y, aunque es de segundo grado en $x_m$, por medio de la ecuación $x^2_m+A_{m-1}x_m+B_m=0$ puede eliminarse de ella la segunda potencia $x^2_m$, reduciéndose á una función lineal de $x_m$.

Es decir, que todos los coeficientes... $A_m$, $B_m$... serán de la forma

$$A'_{m-1}x_m+B'_{m-1}$$

siendo $A'_{m-1}$ y $B'_{m-1}$ funciones racionales de $p$, $q$, $r$..... $x_1$, $x_2$..... $x_{m-1}$, en general fraccionarias.

De este modo queda demostrado, que todo problema que pueda resolverse por rectas y circunferencias dependerá de una serie de ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2+Ax_1+B=0, \\ x_2^2+A_1x_2+B_1=0, \\ x_3^2+A_2x_3+B_2=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m^2+A_{m-1}x_m+B_{m-1}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}^2+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0, \\ x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0, \end{array}\right\} \quad (1')$$

en las cuales podemos suponer:

1.° Que el número de estas ecuaciones ES EL MENOR POSIBLE, evitando incógnitas y ecuaciones intermedias é inútiles.

2.° Qne los coeficientes

$A$, $B$ son funciones racionales de $p$, $q$, $r$...;

$A_1$, $B_1$ funciones lineales de $x_1$, con coeficientes racionales de $p$, $q$, $r$...;

$A_2$, $B_2$ funciones lineales de $x_2$, con coeficientes racionales de $p$, $q$, $r$... $x_1$;

$A_3$, $B_3$ funciones lineales de $x_3$, con coeficientes racionales de $p$, $q$, $r$... $x_1$, $x_2$;

.....................................................

$A_{m-1}$ $B_{m-1}$ funciones lineales de $x_{m-1}$, con coeficientes racionales de $p, q, r\ldots x_1, x_2,\ldots x_{m-2}$;

.................................................................

$A_{n-1}$, $B_{n-1}$ funciones lineales de $x_{n-1}$, con coeficientes racionales de $p, q, r\ldots x_1, x_2\ldots x_{n-2}$.

Con estos antecedentes podemos establecer tres teoremas importantes.

**Teorema 1.°** Una cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo

$$x^2_{m+1}+A_m x_{m+1}+B_m=0, \qquad (2)$$

no puede ser satisfecha por una función racional

$$x_{m+1}=f\,(p,\ q,\ r\ldots x_1,\ x_2,\ldots x_m)$$

de los datos y de alguno de los sistemas de raíces de las ecuaciones precedentes.

*Demostración.*—Si un valor racional

$$x_{m+1}=f\,(p,\ q,\ r\ldots x_1,\ldots x_m)$$

satisficiese á la ecuación (2), poniendo $x_{m+1}$ en (2) tendríamos

$$f^2+A_m f+B_m=0;$$

pero esta es una función racional de $p, q, r\ldots x_1\ldots x_m$, puesto que $f$ lo es por hipótesis, y lo son $A_m$ y $B_m$: luego podrá ponerse, empleando el método indicado, bajo la forma linea

$$A'_{m-1}x_m+B'_{m-1}=0,$$

siendo $A'_{m-1}$ y $B'_{m-1}$ funciones racionales de

$$p,\ q,\ r\ldots x_1\ldots x_{m-1}.$$

Este valor de $x_m$, sustituído en

$x^2_m+A_{m-1}x_m+B_{m-1}=0$, daría $A'_{m-2}x_{m-1}+B'_{m-2}=0$.

El valor de $x_{m-1}$, deducido de la anterior, sustituído en $x^2_{m-1}+A_{m-2}x_{m-1}+B_{m-2}=0$, daría también $A'_{m-3}x_{m-2}+B'_{m-3}=0$.

Y así sucesivamente hasta $A'x_1+B'=0$: es decir que $x^2_1+A\,x_1+B=0$, cuyos coeficientes $A$ y $B$ son funciones racionales de $p, q, r\ldots$, tiene una raíz $x_1=-\dfrac{B'}{A'}$ función racional de p, q, r...: de donde se deduce que la otra raíz lo es también, por ser igual al cociente de B dividido por $-\frac{B'}{A'}$.

Cada uno de estos valores de $x_1$, sustituído en la serie de ecuaciones (1'), da un sistema de $n-1$ ecuaciones (puesto que la primera desaparece) con una incógnita menos, la $x_1$, que desaparece también.

De aquí resulta que el sistema (1') podrá reducirse á menor número de ecuaciones, lo cual es contra la hipótesis.

La demostración caería en defecto si una de las relaciones intermedias, la que se obtiene, por ejemplo, poniendo el valor de $x_s$, deducido de $A'_{s-1}\,x_s+B'_{s-1}=0$, en $x_s^2+A_{s-1}x_s+B_{s-1}=0$, en vez de reducirla á $A'_{s-2}\,x_{s-1}+B'_{s-2}=0$, la redujera á una identidad $0=0$; pero esto querría decir que $x_s=-\frac{B'_{s-1}}{A'_{s-1}}$ era una raíz de $x_s^2+A_{s-1}x_s+B_{s-1}=0$ *para cualquier valor de* $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{s-1}$; y entonces podríamos eliminar $x_s$ de todas las ecuaciones que siguen á $x_s^2+A_{s-1}x_s+B_{s-1}=0$, poniendo sus dos valores en dichas ecuaciones, con lo cual obtendríamos dos series distintas de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas, á saber:

Primera serie: Las anteriores y siguientes á la

$$x_s^2+A_{s-1}x_s+B_{s-1}=0,$$

poniendo en ellas la *primera raíz* de $x_s$.

Segunda serie: Las anteriores y siguientes también, poniendo por $x_s$ la *segunda raíz*.

Se suprimirá la ecuación $x_s^2+A_{s-1}x_s+B_{s-1}=0$ y la incognita $x_s$.

Y se obtendrá así un resultado contrario á la hipótesis fundamental de un número mínimo de ecuaciones.

*Observación importante.*—Para comprender bien la demostración precedente, rigorosa en verdad, pero un poco sutil, hay que fijarse en las condiciones del problema: las cantidades

$x_1$, $x_2$, $x_3$... no tienen un valor único, sino multiplicidad de valores.

Por ejemplo, $x_1$ tiene dos valores.

En la segunda ecuación de las (1') á cada valor de $x_1$ que entra en $A_1$, $B_1$, corresponden dos valores para $x_2$.

En la tercera ecuación de la misma serie (1') á cada sistema de valores de $x_1$, $x_2$, que son cuatro, corresponden otros dos para la incógnita, y por lo tanto resultan ocho valores para $x_3$; y así sucesivamente: de modo que hay muchos sistemas de valores para $x_1$, $x_2$,... $x_n$, como habíamos dicho.

Ahora bien, la ecuación $x_{m+1}=f\,(p, q, r... x_1, x_2... x_m)$ sólo suponemos que existe *para uno de estos sistemas*, y por consiguiente no es general para todos los sistemas. Si lo fuese, la demostración anterior sería inútil, porque bastaba eliminar $x_{m+1}$ de todas las ecuaciones, con lo que tendríamos una ecuación menos y una incógnita menos, lo cual es contra la hipótesis de haberse reducido el sistema (1') al menor número de ecuaciones.

Teorema 2.º La ecuación final en $x_n$, que es la del problema y se obtiene eliminando $x_1$, $x_2$, $x_3$... $x_{n-1}$ del sistema (1'), es del grado $2^n$, siempre en la hipótesis de un mínimo de ecuaciones.

*Demostración.*—La demostración está reducida á repetir lo dicho en la *observación* precedente.

La primera ecuación da dos valores $x'_1$, $x''_1$ para $x_1$.

Poniendo cada uno de estos valores en la segunda ecuación en $A_1$ y $B_1$, para cada uno dicha ecuación dará otros dos valores, puesto que es de segundo grado, y tendremos cuatro sistemas, ó sea $2^2$, á saber:

$$\text{para } x_1' \begin{cases} x_2' \\ x_2'' \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} x_1', & x_2' \\ x_1', & x_2'' \end{matrix}\right\}$$

$$\text{para } x_1'' \begin{cases} x_2''' \\ x_2^{IV} \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} x_1'', & x_2''' \\ x_1'', & x_2^{IV} \end{matrix}\right\}.$$

Sustituyendo estos cuatro grupos en la tercera ecuación, es decir, en $A_2$, $B_2$, para cada uno dicha ecuación dará dos valores ó en totalidad $4 \times 2 = 2^2 \times 2 = 2^3$: es decir, estos ocho sistemas:

$$
\text{para}\left\{
\begin{array}{lll}
x'_1,\ x'_2 & \left\{\begin{array}{l} x'_3 \\ x''_3 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} x'_1,\ x'_2,\ x'_3 \\ x'_1,\ x'_2,\ x''_3 \end{array}\right\}, \\[2ex]
x'_1,\ x''_2 & \left\{\begin{array}{l} x'''_3 \\ x^{IV}_3 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} x'_1,\ x''_2,\ x'''_3 \\ x'_1,\ x''_2,\ x^{IV}_3 \end{array}\right\}, \\[2ex]
x''_1,\ x'''_2 & \left\{\begin{array}{l} x^{V}_3 \\ x^{VI}_3 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} x''_1,\ x'''_2,\ x^{V}_3 \\ x''_1,\ x'''_2,\ x^{VI}_3 \end{array}\right\}, \\[2ex]
x''_1,\ x^{IV}_2 & \left\{\begin{array}{l} x^{VII}_3 \\ x^{VIII}_3 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} x''_1,\ x^{IV}_2,\ x^{VII}_3 \\ x''_1,\ x^{IV}_2,\ x^{VIII}_3 \end{array}\right\}.
\end{array}
\right.
$$

Sustituyendo estos ocho sistemas en la cuarta ecuación, á cada uno corresponderán dos valores para $x_4$ y tendremos diez y seis sistemas, $= 2^4$, y una ecuación del grado diez y seis en $x_4$ y cantidades conocidas.

En general la ecuación n.$^{\text{ma}}$, que sólo contendrá $x_n$, p, q, r..., y que será la ecuación del problema, ascenderá al grado $2^n$, que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

Así, pues, en problemas bien planteados, sólo podrán resolverse con la recta y el círculo los que den una ecuación final del grado $2^n$: resultado importantísimo.

TEOREMA 3.º La ecuación en $x_n$ del grado $2^n$, que da todas las soluciones del problema, y ninguna solución extraña; es decir, que puede descomponerse en *n* ecuaciones *sucesivas*, de segundo grado (no en *n* factores: hay que fijarse bien en esto) cada una de las cuales podrá resolverse por intersecciones de rectas y circunferencias, por ser de segundo grado; dicha ecuación, repetimos, *es una ecuación irreducible:* ó de otro modo, no podrá tener raíces comunes con ninguna ecuación de grado menor y cuyos coeficientes sean funciones racionales de los datos p, q, r..., conforme la definición de las ecuaciones irreducibles pide.

*Demostración.*—Supongamos que así no fuese y que tuvieran una raíz común la ecuación

$$x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0,$$

y la ecuación $F(x_n)=0$, cuyos coeficientes también suponemos que son cantidades racionales de p, q, r...

Decir que ambas ecuaciones tienen una raíz común, quiere decir, que un mismo valor de $x_n$ satisface á $F(x_n)=0$, y á $x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}$, poniendo en esta última los valores de $x_1$, $x_2$, $x_3$... $x_{n-1}$ que con $x_n$ forman uno de los $2^n$ sistemas de las ecuaciones propuestas.

Ahora bien, como $F(x_n)=0$ es una función racional y entera en $x_n$, eliminando, como ya hicimos anteriormente, las potencias superiores de $x_n$ por medio de $x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0$, tendremos una ecuación lineal en $x_n$, de la forma $A'_{n-1}x_n+B'_{n-1}=0$, en la cual $A'_{n-1}$ y $B'_{n-1}$ serán funciones racionales de p, q, r... $x_1$, $x_2$... $x_{n-1}$ (y por eso ponemos á $A'_{n-1}$, $B'_{n-1}$ el subíndice $n-1$: para recordarlo): advirtiendo que estas $x_1$, $x_2$, $x_3$... $x_{n-1}$. son únicamente los valores que con $x_n$ forman parte del sistema á que la raíz común $x_n$ pertenece.

Tendremos, pues, en vez de $F(x_n)=0$,..$A'_{n-1}x_n+B'_{n-1}=0$.

Pero es preciso que $A'_{n-1}$ y $B'_{n-1}$ sean nulas ambas, es decir, que la ecuación precedente sea idéntica; porque si no la ecuación $x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0$ quedaría satisfecha por el valor $x_n=-\dfrac{B'_{n-1}}{A'_{n-1}}$, es decir, por una función racional de p, q, r... $x_1$, $x_2$... $x_{n-1}$: lo cual, por el primero de estos tres teoremas, hemos demostrado que es imposible.

Tendremos pues:

$$A'_{n-1}=0;\ B'_{n-1}=0.$$

Cada una de estas dos ecuaciones se encuentra en el mismo caso que $F(x_n) = 0$: pudiendo ponerse,

$$A'_{n-1}=0 \text{ bajo la forma } A'_{n-2}\, x_{n-1}+B'_{n-2}=0; \text{ y}$$

$$B'_{n-1}=0 \text{ bajo la forma } A''_{n-2}x_{n-1}+B''_{n-2}=0.$$

Y por la misma razón, es decir, para que los valores deducidos para $x_{n-1}$ no satisfagan á $x^2_{n-1}+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0$, debe suponerse que

$$A'_{n-2}=0,\ B'_{n-2}=0,\ A''_{n-2}=0,\ B''_{n-2}=0.$$

A cada una de estas ecuaciones, que se hallan en el mismo caso de $F(x_n)=0$, es decir que son funciones racionales de $p, q, r \ldots x_1, x_2 \ldots x_{n-2}$, se le puede dar la forma lineal en $x_{n-2}$, y se deberán igualar sus coeficientes á cero.

Siguiendo este procedimiento, llegaremos á una serie de ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} A'_1=0, & A''_1=0, & A'''_1=0, & \ldots\ldots \\ B'_1=0, & B''_1=0, & B'''_1=0, & \ldots\ldots \end{array} \qquad (3)$$

cada una de las cuales será una función racional de $p, q, r \ldots x_1$, que, por medio de la ecuación $A x_1^2 + A x_1 + B = 0$, debe ser idénticamente nula: de suerte que en último análisis demostraremos que

$$A'=0,\ A''=0,\ A'''=0 \ldots\ldots$$

$$B'=0,\ B''=0,\ B'''=0 \ldots\ldots$$

Pero en $A'$ y $B'$..... no entran ya más que cantidades conocidas, $p, q, r$..; de suerte que se anulan por sí mismas, independientemente de los valores de $x_1$.

Luego cada una de las ecuaciones $A'x_1+B'=0$ se reducirá á cero para las dos raíces de $x_1^2+A\,x_1+B=0$, ó sea para los dos valores de $x_1$: tanto da, en efecto, poner en vez de $x_1$ el valor $x'_1$, como $x''_1$: siempre $A'x'_1+B'$ y $A'x''_1+B'$ serán nulas, porque lo son sus coeficientes.

Y lo mismo puede decirse de todas las cantidades de la serie (3), y de todas las series anteriores análogas á ésta.

De aquí resulta, como consecuencia final, que la expresión de donde hemos partido, la $A'_{n-1}x_n+B'_{n-1}$, ó su equivalente $F(x_n)$, será nula para todos los sistemas de valores de $x_1$, $x_2$, $x_3$...: es decir, que la $F(x_n)=0$ será nula para todos los valores de $x_n$.

O, de otro modo: $F(x_n)=0$ admite todas las raíces $x_n$ de la ecuación final del sistema (1'); y esto nos prueba que $F(x_n) = 0$, ó es la misma ecuación final ó la contiene como factor, y es, por lo tanto, de grado superior, y no, como sería preciso para que dicha ecuación final fuese reducible, de grado inferior á ésta.

En definitiva, la hipótesis es inadmisible: el hecho de contener $F(x_n)=0$ una sola raíz $x_n$ obliga á dicha ecuación á contenerlas todas.

Resumen—1.° Toda *ecuación* final de un problema, susceptible de ser resuelto por la línea recta y la circunferencia de círculo, puede considerarse como la ecuación final de un sistema análogo al (1').

2.° Su grado será precisamente, en la hipótesis del número mínimo de ecuaciones, $2^n$.

3.° Dicha ecuación final debe ser precisamente *irreducible.*

Método general.—El método general es bien sencillo en teoría, aunque de tal complicación material en la práctica, que en muchos casos es inaplicable.

Todo está reducido, una vez puesto en ecuación el problema de que se trata, á ver si dicha ecuación puede descomponerse en el sistema (1').

Supongamos que el problema geométrico que nos ocupe está expresado por la ecuación

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Rx + S = 0.$$

1.° Veremos, ante todo, si esta ecuación es irreducible: si lo es, podemos seguir adelante; si no lo fuese, se descompondría en sus factores irreducibles, á cada uno de los cuales sería preciso aplicar lo que sigue. Y notemos que el método de Wantzel supone ya la resolución de este primer