pero ha menester de nuevos desarrollos para poder aplicarse á

$$\Sigma e^{r(z_1 + z_2 + \dots z_p)} \dots\dots$$

Como apesar de mis deseos y de mis esfuerzos, no he podido ver la Memoria original del insigne matemático, he tenido que limitarme á *sospechar* lo que su demostración podrá ser; aclaración que importa, para que el lector sepa á qué atenerse, y que importa además, porque la materia es un tanto sutil y sobre ella no se ha dicho la última palabra.

2.° Aclaraciones análogas debo consignar respecto á la *Observación* de la pág. 47.

Desconozco la marcha seguida por Lindeman y solo como anticipación aventuro una idea que necesitaría espacio y detenimiento para ser desarrollada convenientemente.

3.° En cuanto al método de Wantzel, he procurado presentarlo en la forma más sencilla posible y no creo que su inteligencia ofrezca dificultades á la mayor parte de los lectores. Sin embargo, en el *complemento del método general*, pág. 75, aunque he hecho lo posible por ceñirme á la forma, é interpretar la idea de Wantzel, no creo que el punto sea suficientemente claro, y si me hubiera sido lícito mezclar mis propios estudios á los del insigne matemático, habría presentado esta parte de la Memoria, bajo un aspecto diverso del que tiene en la nota del expresado autor.

Quizá más adelante complete dicho punto que considero importante para la generalidad del método.

4.° En la última parte de este trabajo he empleado algunas demostraciones, que me parecen nuevas y sencillas y que de todas maneras someto al recto juicio de mis lectores.

J. Echegaray.

I.

SOBRE LA IMPOSIBILIDAD

DE LA

CUADRATURA DEL CÍRCULO.

En una nota, inserta al final del tomo I de la 5.ª edición de su *Tratado de Geometría*, se expresan los Sres. Rouché y Comberousse en los términos siguientes, á propósito del célebre problema de la Cuadratura del Círculo, que sirve de epígrafe á estas páginas:

«No hay problema que con mayor afán se haya intentado resolver que el de la Cuadratura del Círculo: resolverlo, bien entendido, construyendo un cuadrado, de área equivalente á la de un círculo cualquiera, con auxilio exclusivo de la regla y del compás, ó por medio de número limitado de líneas rectas y de circunferencias. Y aunque no existía hasta ahora, propiamente hablando, ninguna demostración rigurosa de la imposibilidad de conseguirlo, y únicamente estaba probado (por *Lambert*, en 1761) que la razón de la circunferencia al diámetro es inconmensurable, así como también la de su cuadrado (por *Legendre*, en la nota IV de su Geometría, y por *Hermite*, en el *Journal de Crelle*, del año 1873), por irresoluble se tenía el mencionado problema, en vista de los reiterados, infructuosos esfuerzos, empleados en resolverlo.

»En los problemas gráficos, de solución factible con la regla y el compás, cada punto de la figura que para ello es menester construir se determina, ó por las intersecciones de dos rectas, ó de una recta y un círculo, ó de dos círculos. Pues si, conforme las construcciones avanzan, se expresan algebraicamente los resultados obtenidos, con auxilio de las fórmulas de la Geometría Analítica, adviértese que las ecuaciones que así se van desprendiendo son siempre ó lineales ó cuadráticas: de modo que la ecuación final que de todas ellas se deduzca, mediante número suficiente de elevaciones sucesivas al cuadrado, se convertirá en ecuación de grado par, con coeficientes racionales. Quedará, por lo tanto, demostrada la imposibilidad de la cuadratura del círculo, con sólo demostrar que el número π *no puede ser raíz de una ecuación de cualquier grado con coeficientes racionales.*

»M. Lindemann anunció (*Comptes rendus*, tomo XCV, y *Mathematische Annalen*, tomo XX, 1882) que había conseguido deducir la prueba de esta proposición, apoyándose en ciertas fórmulas halladas por M. Hermite, y por este sabio geómetra publicadas en 1874, en su *Memoria sobre la Función Exponencial*. Y, en efecto, su método de demostración es variante no más, pero muy ingeniosa, del empleado por Hermite para demostrar que el número e, base del sistema de logaritmos neperianos, goza de propiedad análoga á la enunciada del número π.

»Simplificando algunos detalles, vamos, pues, á exponer las fórmulas de Hermite y las lucubraciones posteriores de Lindemann, resumidas en un trabajo muy notable, y muy digno además de atención, por cuanto, en el concepto de la simplicidad ó claridad, no parece que deba considerarse todavía como absolutamente perfecto.»

Con el mismo fin que los Sres. Rouché y Comberousse, aunque desviándonos un poco del camino por ellos seguido, y sin haber podido hasta ahora proporcionarnos la Memoria original de Lindemann, hemos nosotros borrajeado las siguientes páginas, concernientes también á las fórmulas y teoremas preliminares, muy importantes, de Hermite, y á la demostración ulterior del eminente geómetra alemán; y las entregamos á la imprenta, por si de su lectura pueden reportar algún provecho los lectores españoles, dedicados al estudio de las Matemáticas.

FÓRMULAS DE HERMITE.

TEOREMA. I. Dada una ecuación de la forma

$$f(z)=z^n+a_1 z^{n-1}+\dots\dots+a_n=0, \qquad (\alpha)$$

en la cual n es un número entero y positivo, y cuyas raíces designaremos por $z_1, z_2, z_3 \dots\dots z_n$, si se toma otro número entero y positivo m, completamente arbitrario, siempre se podrá determinar un polinomio entero y del grado n, en z, que representaremos por

$$z^n+\theta_1(z_i)z^{n-1}+\theta_2(z_i)z^{n-2}+\dots\dots+\theta_n(z_i) \qquad (1)$$

ó abreviadamente por $\Phi(z, z_i)$, (siendo z_i una cualquiera de las raíces $z_1, z_2 \dots z_n$, ó el número cero) tal que se verifique como *identidad* la siguiente relación:

$$\frac{z f(z)}{z-z_i}=\Phi(z, z_i)-\frac{d\,\Phi(z, z_i)}{dz}-$$

$$m\left[\frac{\Phi(z, z_i)-\Phi(z_0, z_i)}{z-z_0}+\frac{\Phi(z, z_i)-\Phi(z_1, z_i)}{z-z_1}+\dots+\frac{\Phi(z, z_i)-\Phi(z_n, z_i)}{z-z_n}\right] \qquad (2)$$

Debemos advertir que, según queda dicho, z_0 es cero; y que z_i puede ser cualquiera de la serie $z_i=0,\ z_1.\ z_2,\ z_3 \dots z_n$.

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos dicho que z_i es una raíz cualquiera de la ecuación (α); y todo está reducido á ver si pueden determinarse los coeficientes $\theta_1(z_i)$, $\theta_2(z_i) \dots \theta_n(z_i)$, que son las verdaderas incógnitas, de modo que se verifique la identidad.

Para ello observemos que el primer miembro de la ecuación (2) es un polinomio en z del grado n cuyo primer término es z^n; pero el segundo miembro es también otro polinomio análogo en z, puesto que el primer término $\Phi(z, z_i)$ lo es, y todos los demás son polinomios en z del grado $n-1$. Además el primer término de Φ es z^n: luego, al comparar ambos miembros, tendremos n términos que identificar, fuera de los z^n que son iguales, y resultarán por tanto n ecuaciones de condición con las n incógnitas $\theta_1(z_i)$, $\theta_2(z_i)$ ... $\theta_n(z_i)$.

De aquí se deduce que el problema es perfectamente determinado, y que todos estos coeficientes serán funciones de z_i, de m, de las raíces z_1, z_2, z_3, ... z_n que entrarán explícitamente, y de los coeficientes a_1, a_2, a_3 ... a_n de la ecuación (α), toda vez que estas son las cantidades que entran en dichas ecuaciones.

Desarrollemos este cálculo un tanto pesado, pero sencillísimo.

La ecuación (2) se convertirá en la siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{z\,(z^n+a_1 z^{n-1}+a_2 z^{n-2}+\ldots a_n)}{z-z_i}=z^n+\theta_1(z_i)\,z^{n-1}+\theta_2(z_i)z^{n-2}+\ldots\\
&+\theta_n(z_i)-n z^{n-}-(n-1)\,\theta_1(z_i)\,z^{n-2}-(n-2)\,\theta_2(z_i)\,z^{n-3}\ldots-\theta_{n-1}(z_i)\\
&-m\Bigg[\frac{z^n-z_0{}^n+\theta_1(z_i)(z^{n-1}-z_0{}^{n-1})+\theta_2(z_i)(z^{n-2}-z_0{}^{n-2})+\ldots+\theta_{n-1}(z_i)(z-z_0)}{z-z_0}\\
&+\frac{z^n-z_1{}^n+\theta_1(z_i)(z^{n-1}-z_1{}^{n-1})+\theta_2(z_i)(z^{n-2}-z_1{}^{n-2})+\ldots+\theta_{n-1}(z_i)(z-z_1)}{z-z_1}\\
&+\frac{z^n-z_2{}^n+\theta_1(z_i)(z^{n-1}-z_2{}^{n-1})+\theta_2(z_i)(z^{n-2}-z_2{}^{n-2})+\ldots+\theta_{n-1}(z_i)(z-z_2)}{z-z_2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{z^n-z_n{}^n+\theta_1(z_i)(z^{n-1}-z_n{}^{n-1})+\theta_2(z_i)(z^{n-2}-z_n{}^{n-2})+\ldots+\theta_{n-1}(z_i)(z-z_n)}{z-z_n}\Bigg]
\end{aligned}\right\}\;(2')$$

En el primer miembro todo se reduce á dividir

$$z^{n+1}+a_1z^n+a_2z^{n-1}+\ldots+a_n z \text{ por } z-z_i,$$

lo cual por el método ordinario da:

$$z\left[\begin{array}{ll|ll|ll|ll|ll}
z^{n-1} & +a_1 & z^{n-2} & +a_2 & z^{n-3} & +a_3 & z^{n-4}+\ldots & +a_k & z^{n-k-1}\ldots & +a_{n-1}\\
 & +z_i & & +a_1z_i & & +a_2z_i & & +a_{k-1}z_i & & +a_{n-2}z_i\\
 & & & +z_i^2 & & +a_1z_i^2 & & +a_{k-2}z_i^2 & & +a_{n-3}z_i^2\\
 & & & & & +z_i^3 & & \vdots & & \vdots\\
 & & & & & & & +z_i^k & & +z_i^{n-1}
\end{array}\right]:$$

el resto de la división $z_i^n + a_1 z_i^{n-1} + \ldots + a_n$ es evidentemente *nulo*, puesto que z_i es una de las raíces de (α) por hipótesis.

En el paréntesis del 2.º miembro todos los grupos tienen la misma forma, y sólo difieren unos de otros en que, en el primero entra z_0, en el segundo z_1, en el tercero z_2, y así sucesivamente: basta, pues, considerar el término general

$$\frac{z^n - z_p^n + \theta_1(z_i)(z^{n-1} - z_p^{n-1}) + \theta_2(z_i)(z^{n-2} - z_p^{n-2}) + \ldots \theta_{n-1}(z_i)(z - z_p)}{z - z_p},$$

que, por ser todos los términos de su numerador exactamente divisibles por el denominador $z - z_p$, se transforma en el que sigue:

$$\begin{array}{ll|ll|l}
z^{n-1} & + z^{n-2} & \theta_1(z_i) & + z^{n-3} & \theta_2(z_i) + \ldots + \theta_{n-1}(z_i) \\
+ z^{n-2} z_p & + z^{n-3} z_p & & + z^{n-4} z_p & \\
+ z^{n-3} z_p^2 & + z^{n-4} z_p^2 & & + z^{n-5} z_p^2 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
+ z_p^{n-1} & + z_p^{n-2} & & + z_p^{n-3} &
\end{array}$$

En resumen, la ecuación (2') puede escribirse de este modo, representando con el signo $\Sigma_{p=0}^{p=n}$ el conjunto de todos los términos análogos al anterior:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
z^n + a_1 & z^{n-1} + a_2 & z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} & z = \\
+ z_i & + a_1 z_i & + a_{n-2} z_i & \\
 & + z_i^2 & + a_{n-3} z_i^2 & \\
 & & \vdots & \\
 & & + z_i^{n-1} &
\end{array} \qquad (2'')$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
z^n + \theta_1(z_i) & z^{n-1} + \theta_2(z_i) & z^{n-2} + \theta_3(z_i) & z^{n-3} + \ldots + \theta_n(z_i) \\
- n & - (n-1)\theta_1(z_i) & - (n-2)\theta_2(z_i) & - \theta_{n-1}(z_i)
\end{array}$$

$$- m \, \Sigma_{p=0}^{p=n} \left[\begin{array}{ll|ll|l}
z^{n-1} & + z^{n-2} & \theta_1(z_i) & + z^{n-3} & \theta_2(z_i) + \ldots + \theta_{n-1}(z_i) \\
+ z^{n-2} z_p & + z^{n-3} z_p & & + z^{n-4} z_p & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
+ z_p^{n-1} & + z_p^{n-2} & & + z_p^{n-3} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array} \right]$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de ambos miembros, tendremos en general para los coeficientes de z^{n-k}:

En el primer miembro

$$a_k + a_{k-1} z_i + a_{k-2} z_i^2 + \ldots\ldots + a_1 z_i^{k-1} + z_i^k \qquad (I).$$

En el 2.º miembro el coeficiente de z^{n-k} se compondrá de dos partes: la *primera* $\theta_k(z_i) - (n-k+1)\,\theta_{k-1}(z_i)$, (II); y la *segunda* será el producto de m por todos los coeficientes de z^{n-k} en $\Sigma_{p=0}^{p=n}$: veamos cuales serán estos.

Para cada término de Σ habrá que buscar el coeficiente de dicha potencia z^{n-k} en cada línea vertical; y hallaremos

$$\begin{array}{ll} \text{en la primera...} & z_p^{k-1} \quad ; \\ \text{segunda...} & z_p^{k-2}\,\theta_1(z_i); \\ \text{tercera....} & z_p^{k-3}\,\theta_2(z_i); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & ; \end{array}$$

$z_p\,\theta_{k-2}(z_i)$ en el polinomio del grado z^{n-k+1}; y $\theta_{k-1}(z_i)$ en el último polinomio que contiene la potencia z^{n-k} cuyos coeficientes se buscan.

Las demás líneas verticales contienen potencias inferiores á z^{n-k}.

De aquí se deduce que todo el grupo Σ dará como coeficiente de z^{n-k}

$$m\left[\Sigma_{p=0}^{p=n} z_p^{k-1} + \Sigma_{p=0}^{p=n} z_p^{k-2}\,\theta_1(z_i) + \ldots + \Sigma_{p=0}^{p=n} z_p\,\theta_{k-2}(z_i) + \Sigma_{p=0}^{p=n}\theta_{k-1}(z_i)\right]$$

Sacando fuera de las Σ los factores comunes $\theta_1(z_i)$, $\theta_2(z_i)\ldots$; recordando que por hipótesis $z_0 = 0$; y observando que $\Sigma_{p=0}^{p=n} z_p^{k-1}$ es la suma de las potencias $k-1$ de las raíces, y lo mismo para los demás términos, tendremos, invirtiendo el orden de éstos:

$$m\,[S_0\,\theta_{k-1}(z_i) + S_1\,\theta_{k-2}(z_i) + \ldots S_{k-2}\,\theta_1(z_i) + S_{k-1}] \qquad (III).$$

Hemos representado por S_0, S_1, S_2 ... S_{k-2}, S_{k-1} la suma de las potencias 0, 1, 2 ... k—1 de las raíces de (α), y hemos supuesto $S_0 = n+1$, porque efectivamente en $\sum_{p=0}^{p=n}$ hay $n+1$ términos iguales á $\theta_{k-1}(z_i)$.

En último resultado, igualando (I) á la suma de (II) y (III) resultará

$$z_i^k + a_1 z_i^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z_i + a_k = \theta_k(z_i) - (n-k+1)\,\theta_{k-1}(z_i)$$

$$- m\,[S_0\,\theta_{k-1}(z_i) + S_1\,\theta_{k-2}(z_i) + \ldots + S_{k-2}\,\theta_1(z_i) + S_{k-1}] \quad (3).$$

Esta es la condición que resulta de igualar los coeficientes de z^{n-k} en los dos miembros de la ecuación (2) ó (2') ó (2''); pero como hay las potencias z^{n-1}, z^{n-2}, ... z, z^0 (prescindiendo de z^n), la indeterminada k deberá tomar los valores $k=1, 2, 3, \ldots n$: con lo cual tendremos n ecuaciones para determinar $\theta_1(z_i)$, $\theta_2(z_i)$, $\theta_3(z_i)$ ... $\theta_n(z_i)$.

Poniendo, pues, sucesivamente en (3) estos valores de k, obtendremos el siguiente grupo de ecuaciones de condición:

$$k=1 \ldots z_i + a_1 = \theta_1(z_i) - n - m\,[S_0]$$

$$k=2 \ldots z_i^2 + a_1 z_i + a_2 = \theta_2(z_i) - (n-1)\,\theta_1(z_i) - m\,[S_0\theta_1(z_i) + S_1]$$

$$k=3 \ldots z_i^3 + a_1 z_i^2 + a_2 z_i + a_3 = \theta_3(z_i) - (n-2)\theta_2(z_i) - m\,[S_0\theta_2(z_i) + S_1\theta_1(z_i) + S_2]$$

....

$$k=n \ldots z_i^n + a_1 z_i^{n-1} + a_2 z_i^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z_i + a_n = 0 = \theta_n(z_i) - \theta_{n-1}(z_i) -$$

$$m\,[S_0\theta_{n-1}(z_i) + S_1\theta_{n-2}(z_i) + \ldots + S_{n-2}\theta_1(z_i) + S_{n-1}].$$

De la *primera* ecuación se deducirá θ_1, en función de cantidades conocidas.

De la *segunda*, poniendo antes el valor de θ_1, se deducirá el de θ_2. Y así sucesivamente de todas las demás.

Con lo cual queda demostrada la posibilidad de la expresión (2), y quedan también determinados los valores de θ_1, θ_2 ... de la ecuación (1).

Más aun: del grupo anterior resulta que θ_1 es un polinomio de primer grado en z_i; que θ_2 es un polinomio de segundo grado en z_i; y, en general, que θ_k es un polinomio del grado k en z_i; y además que los coeficientes de este polinomio son funciones enteras de cantidades conocidas y de S_0, S_1, S_2..: es decir, que serán funciones enteras, *simétricas*, y de coeficientes enteros de las raíces de (α).

Tendremos, pues, en general:

$$\theta_k(z_i) = z_i^k + b_1 z_i^{k-1} + b_2 z_i^{k-2} + \ldots + b_k$$

siendo b_1, b_2, b_3 ... b_k funciones enteras y de coeficientes enteros y simétricos de las raíces de (α).

Teorema II. Como

$$\Phi(z, z_i) = z^n + \theta_1(z_i) z^{n-1} + \theta_2(z_i) z^{n-2} + \ldots + \theta_n(z_i)$$

contiene dos cantidades, z, z_i, la primera que es arbitraria, y la segunda que es z_0 ó una de las raíces z_1, z_2 ... z_n de (α), podremos formar la determinante

$$\begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \Phi(z_1, z_0) & \ldots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \Phi(z_1, z_1) & \ldots & \Phi(z_n, z_1) \\ \Phi(z_0, z_2) & \Phi(z_1, z_2) & \ldots & \Phi(z_n, z_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi(z_0, z_n) & \Phi(z_1, z_n) & \ldots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix}$$

haciendo variar el *primer* subíndice, en cada horizontal, de 0 á *n;* y el segundo subíndice, en cada vertical, entre los mismos límites 0, *n:* recordando siempre que entrarán todas las raíces z_1, z_2 ..... z_n, y que además $z_0 = 0$: de modo que la determinante tendrá en líneas y verticales n + 1 términos.

Ahora bien, el teorema consiste en demostrar que dicha determinante es igual á δ^2, representando por δ esta otra determinante de las potencias de las raíces:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & z_1 & \ldots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \ldots & z_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^n & z_1^n & \ldots & z_n^n \end{vmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si representamos, según lo demostrado antes, los valores de θ_1, θ_2, θ_3 ... θ_n, de este modo:

$$\theta_1(z_i) = z_i + b_1$$
$$\theta_2(z_i) = z_i^2 + c_1 z_i + c_2$$
$$\theta_3(z_i) = z_i^3 + d_1 z_i^2 + d_2 z_i + d_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\theta_n(z_i) = z_i^n + v_1 z^{n-1} + v_2 z_i^{n-2} + \dots + v_n$$

tendremos:

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \dots & z_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \dots & z_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix}$$

y podremos hacer las siguientes transformaciones en la segunda determinante.

1.° Agregar á la última línea las anteriores, multiplicadas, por v_n la primera, por v_{n-1} la segunda, etc.; con lo cual tendremos que dicha última línea se convertirá en

$$z_0^n + v_1 z^{n-1} + \dots + v_n;\ z_1^n + v_1 z_1^{n-1} + \dots + v_n; \dots;\ z_n^n + v_1 z_n^n + \dots\ v_n$$

ó sea en $\theta_n(z_0)$, $\theta_n(z_1)$, $\theta_n(z_2)$, ..., $\theta_n(z_n)$

2.° Transformar de igual modo la penúltima, agregándole las anteriores multiplicadas por los coeficientes de $\theta_{n-1}(z_i)$.

3.° Continuar del mismo modo hasta z_0, z_1 ... z_n, que se convertirá en $z_0 + b_1$, $z_1 + b_1$, $z_2 + b_1$, ... $z_n + b_1$ ó bien en $\theta_1(z_0)$, $\theta_1(z_1)$, $\theta_1(z_2)$, ... $\theta_1(z_n)$.

Y de este modo tendremos :

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \\ z_0 & z_1 \ldots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 \ldots & z_n^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^n & z_1^n \ldots & z_n^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \theta_1(z_0) & \theta_1(z_1) \ldots & \theta_1(z_n) \\ \theta_2(z_0) & \theta_2(z_1) \ldots & \theta_2(z_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_n(z_0) & \theta_n(z_1) \ldots & \theta_n(z_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_0^n & z_1^n & \ldots z_n^n \\ z_0^{n-1} & z_1^{n-1} & \ldots z_n^{n-1} \\ z_0^{n-2} & z_1^{n-2} & \ldots z_n^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \theta_1(z_0) & \theta_1(z_1) \ldots & \theta_1(z_n) \\ \theta_2(z_0) & \theta_2(z_1) \ldots & \theta_2(z_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_n(z_0) & \theta_n(z_1) \ldots & \theta_n(z_n) \end{vmatrix}$$

Multiplicando ambas determinantes por verticales, tendremos:

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} z_0^n + \theta_1(z_0) z_0^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_0), & z_1^n + \theta_1(z_0) z_1^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_0), & \ldots & z_n^n + \theta_1(z_0) z_n^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_0) \\ z_0^n + \theta_1(z_1) z_0^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_1), & z_1^n + \theta_1(z_1) z_1^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_1), & \ldots & z_n^n + \theta_1(z_1) z_n^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_1) \\ z_0^n + \theta_1(z_2) z_0^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_2), & z_1^n + \theta_1(z_2) z_1^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_2), & \ldots & z_n^n + \theta_1(z_2) z_n^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^n + \theta_1(z_n) z_0^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_n), & z_1^n + \theta_n(z_n) z_1^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_n), & \ldots & z_n^n + \theta_1(z_n) z_n^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_n) \end{vmatrix}$$

Pero observemos que la primera horizontal se obtiene poniendo en $z^n + \theta_1(z_0) z^{n-1} + \ldots \theta_n(z_0) = \Phi(z_0, z)$, en vez de z, sucesivamente $z_0, z_1, z_2 \ldots z_n$: luego dicha línea será

$$\Phi(z_0, z_0), \quad \Phi(z_1, z_0) \ldots \quad \Phi(z_n, z_0);$$

y, como observaciones análogas pueden hacerse respecto á las demás líneas, tendremos finalmente :

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \Phi(z_1, z_0) & \ldots\ldots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \Phi(z_1, z_1) & \ldots\ldots & \Phi(z_n, z_1) \\ \Phi(z_0, z_2) & \Phi(z_1, z_2) & \ldots\ldots & \Phi(z_n, z_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi(z_0, z_n) & \Phi(z_1, z_n) & \ldots\ldots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix} \quad (3)$$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

Corolario. Se observa desde luego, que á pesar de que entra *m* en cada término de la determinante, desaparece de ella, y que su valor δ^2 no depende mas que de las raíces z_1, z_2, $z_3 \ldots z_n$ de la ecuación (α).

De esta observación se deduce que para las funciones Φ, en que hagamos $m = 0$, subsistirá el teorema anterior.

Haciendo $m = 0$ en la relación (2), y representando por $\varphi(z, z_i)$ las funciones $\Phi(z, z_i)$ para este caso, tendremos:

1.° Que $\varphi(z, z_i)$ estará determinada por esta relación

$$\frac{z\,f(z)}{z - z_i} = \varphi(z, z_i) - \frac{d\,\varphi(z, z_i)}{dz}; \qquad (2''')$$

2.° Que el teorema precedente dará:

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \varphi(z_0, z_0) & \varphi(z_1, z_0) \ldots \varphi(z_n, z_0) \\ \varphi(z_0, z_1) & \varphi(z_1, z_1) \ldots \varphi(z_n, z_0) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(z_0, z_n) & \varphi(z_1, z_n) \ldots \varphi(z_n, z_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ z_0 & z_1 & \ldots z_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^n & z_1^n & \ldots z_n^n \end{vmatrix}^2 \qquad (3')$$

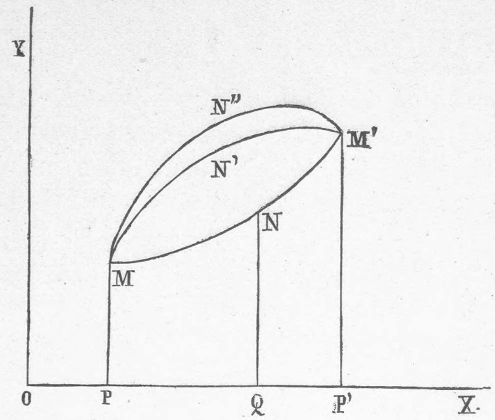
INTEGRALES DEFINIDAS DE VARIABLES IMAGINARIAS.

Antes de pasar adelante, y para la mejor inteligencia del lector, en quien sólo suponemos los conocimientos que generalmente se adquieren al estudiar el Cálculo infinitesimal en las Universidades y Escuelas especiales, haremos una pequeña digresión sobre el tema que acaba de indicarse.

Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, de la variable real x, tiene un sentido perfectamente determinado, porque la variable x sólo puede seguir una serie de valores al pasar de *a* á *b*; pero en la integral $\int_{a+b\sqrt{-1}}^{a'+b'\sqrt{-1}} f(z)\,dz$, siendo $z = x + y\sqrt{-1}$, no sucede lo mismo.

En efecto la variable compleja $x + y\sqrt{-1}$ se determina comunmente, no por un punto en una línea, como la variable real, sino por un punto en un plano.

Así: $a + b\sqrt{-1}$ designará el punto M (fig. 1.ª), si *a* representa la abscisa O P, y *b* la ordenada P M;



(*Fig.* 1.ª)

$a' + b'\sqrt{-1}$, análogamente, el punto M', si $a' = $ O P' y $b' = $ M' P'; y

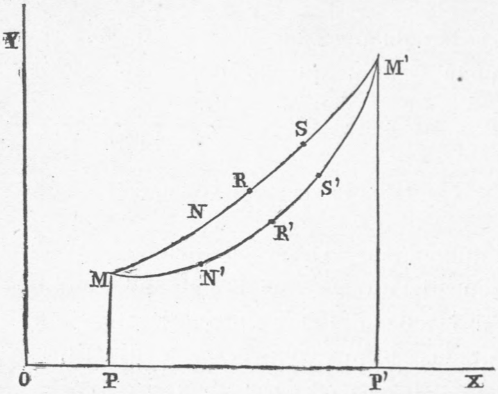
$x + y\sqrt{-1}$ el punto variable N del camino arbitrario para pasar de M á M', si x = O Q, é y = N Q.

De aquí resulta que al variar $z = x + y\sqrt{-1}$ en la integral $\int_{a+b\sqrt{-1}}^{a'+b'\sqrt{-1}} f(z)\, dz$, entre el límite inferior y el superior, es decir, del punto M al M', puede seguir infinitos caminos: M N M', por ejemplo. Y ocurre esta pregunta: al pasar N de M á M' por caminos diversos, M N M', M N' M', M N'' M' etc., ¿la integral conservará el mismo valor, ó tendrá valores diferentes?

Sin estudiar á fondo este problema, y limitándonos á lo puramente preciso para nuestro objeto, podemos decir en forma abreviada que, suponiendo condiciones de continuidad en la curva variable M N M', de modo que f (z) admita, sin *ambigüedad*, un solo valor para cada valor de *z*, y que no pase por infinito, la integral propuesta tiene un valor *único* y perfectamente definido.

Las condiciones de este trabajo, y el tratarse de un problema incidental, nos impiden desarrollos que de otro modo serían indispensables, y por lo tanto nos limitaremos á lo más sencillo y elemental.

Supongamos de M á M', puntos que representan los límites de la integral, dos caminos infinitamente próximos; M N M', y M N' M' (fig. 2.ª); y vamos á probar que para ambos la integral tiene el mismo valor.



(*Fig.* 2.ª)

Descompongamos á M N M' y M N' M' en el mismo número de partes iguales infinitamente pequeñas, y supongamos que R S y R' S' se corresponden.

En las dos integrales:

$$\int_{\text{curva N}} f(z)\,dz \quad \text{é} \quad \int_{\text{curva N}'} f(z)\,dz,$$

correspondientes á los dos contornos N, N', comparemos los elementos correspondientes, y tendremos f (z) d z para la primera, siendo z el valor de z para el punto R; y f (z') d z' para la segunda, siendo z' el valor de z' correspondiente á R'.

Como z' difiere de z en un infinitamente pequeño de primer orden, sin tener en cuenta la diferencia de valores de $d\,z$ y $d\,z'$, se ve que

$$f(z')\,d\,z' - f(z)\,d\,z = (f(z') - f(z))\,d\,z_1,$$

representando por $d\,z_1$ un valor medio entre $d\,z$ y $d\,z'$: expresión equivalente á esta otra:

$$\left(f(z) + \frac{d\,f(z)}{d\,z}\,d\,z - f(z)\right)d\,z_1 = \frac{d\,f(z)}{d\,z}\,d\,z\,d\,z_1,$$

que es un infinitamente pequeño de segundo orden.

De donde resulta que la diferencia de las integrales

$$\int_{\text{curva N}} \quad \text{é} \quad \int_{\text{curva N}'}$$

será un infinitamente pequeño de primer orden y en el límite rigorosamente nula.

Y como la curva M N M' puede pasar de una posición á otra por grados tan pequeños como se quiera, resulta que el valor de la integral $\int_{a+b\sqrt{-1}}^{a'+b'\sqrt{-1}} f(z)\,d\,z$ es único.

Pero no olvidemos las condiciones: porque si $f(z)$ y $f(z')$, á pesar de corresponder á puntos infinitamente próximos, no difiriesen en $\frac{d\,f(z)}{d\,z}\,d\,z'$, sino en una *cantidad finita*, toda la demostración caería por su base, pues la diferencia de dos elementos correspondientes de las dos integrales ya no sería de segundo orden, ni su integral de *primero*, ni en último resultado nula.

Y esto puede suceder si $f(z)$ tiene multiplicidad de valores y la curva da vueltas alrededor de un punto de raíces iguales.

En defecto cae también la demostración precedente si, al deformarse, la curva M N M' pasa por *puntos infinitos*, es decir en que $f(z) = \infty$.

Pero como estas excepciones no han de presentarse en nuestro caso, podemos establecer que la integral

$$\int_{a+b\sqrt{-1}}^{a'+b'\sqrt{-1}} f(z)\,dz$$ tiene un valor determinado, si f (z) es continua y no admite multiplicidad de valores para los que reciba $z = x + y\sqrt{-1}$.

CÁLCULO DE LA INTEGRAL.

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m(z)}{z - z_i}\,dz.$$

Consideremos la integral

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m(z)}{z - z_i}\,dz$$

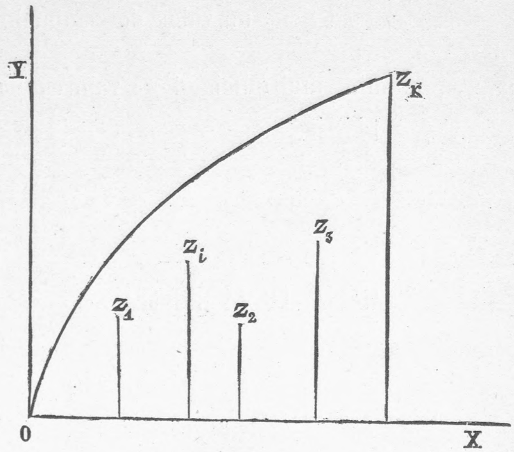
en la que z es una variable imaginaria de la forma $x+y\sqrt{-1}$; *m* un número entero y positivo cualquiera, entre 1 é ∞; f (z) el polinomio (α) cuyas raíces son $z_1, z_2 \ldots z_n$; $f^m(z)$ la potencia *m* del polinomio f (z); y z_i, z_k dos raíces cualesquiera de la ecuación $f(z) = 0$, pudiendo muy bien ser la misma raíz.

Advertiremos además que, cuando $m = 1$, no es esta integral la que se considera, sino

$$\int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z f(z)}{z - z_i}\,dz:$$

es decir, la propuesta, sustituyendo 1 al coeficiente $\frac{1}{1.2.3..(m-1)}$, que en este caso sería infinito.

La integral propuesta se tomará sobre una curva cualquiera O N z_k (figura 3.ª), que vaya del origen á uno de los



(*Fig.* 3.ª)

puntos z_1, z_2, ... z_n que representan las raíces, por ejemplo de O á z_k: y esta integral, advertimos por de pronto, que tendrá un valor único, perfectamente determinado, sea cual fuere la curva de integración O N z_k.

En efecto, siendo f (z) un polinomio entero (α), á cada valor finito de z solo corresponde un valor para $\frac{e^{-z} z^m f^m(z)}{z - z_i}$; y además para valores finitos de z este coeficiente no es infinito, porque si bien entra en el denominador $z - z_i$, y parece que haciendo $z = z_i$ resulta infinito, ha de advertirse que $z - z_i$ entra m veces en f^m (z), es decir *una por lo menos:* de suerte que la expresión en último análisis es entera.

Dada la forma de la integral

$$\frac{1}{1.2\ldots(m-1)} \int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m(z)}{z - z_i} \, dz$$

vemos que depende de tres cantidades: el número m, la raíz z_i que entra en el denominador, y la raíz z_k que es el límite superior. Para abreviar representaremos dicha integral por el símbolo m_k: de suerte que

$$m_k^i = \frac{1}{1.2\ldots(m-1)} \int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m(z)}{z - z_i} d\,z;$$

y conviene recordar siempre, que el subíndice *k* indica la raíz z_k como límite, y el índice *i* la raíz z_i que entra en el denominador.

Además, según lo convenido

$$(1)_k^i = \int_0^{z_k} \frac{e^{-z} f(z)}{z - z_i}.$$

Pasemos ya al cálculo de m_k^i, sean cuales fueren m, i, k, dentro de lo convenido para estas cantidades.

Multiplicando los dos miembros de la (2) por $e^{-z}\, z^m\, f^m(z)\, d\,z$, y dividiendo por 1. 2. 3... m, resultará:

$$\frac{1}{1.\,2.\,3\ldots m} \frac{e^{-z}\, z^{m+1}\, f^{m+1}(z)\, d\,z}{z - z_i} = \Phi(z, z_i) \frac{1}{1.\,2\ldots m} e^{-z} z^m f^m(z)\, dz$$
$$- \frac{d\,\Phi(z, z_i)}{d\,z} d\,z. \frac{1}{1.\,2\ldots m} e^{-z} z^m f^m(z) - \frac{1}{1.2.\,m-1}\left[\frac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_0 z_i)}{z - z_0}\right.$$
$$\times e^{-z} z^m f^m(z)\, d\,z + \frac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_1, z_i)}{z - z_1} e^{-z} z^m f^m(z)\, d\,z + \ldots +$$
$$\left.\frac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_n, z_i)}{z - z_n} e^{-z} z^m f^m(z)\, d\,z\right]$$

Ordenando de otro modo la ecuación precedente, tendremos, recordando además que $z_0 = 0$:

$$\frac{1}{1.\,2\ldots m} \frac{e^{-z}\, z^{m+1} f^{m+1}(z)\, d\,z}{z - z_i} = - \frac{1}{1.\,2.\,m} \times$$
$$\left[\frac{d\,\Phi(z, z_i)}{d\,z} d\,z.\, e^{-z} z^m f^m(z) - \Phi(z, z_i)\, e^{-z} z^m f^m(z)\, d\,z + \right.$$
$$\left. m\left(\frac{e^{-z} z^m f^m(z)\, d\,z}{z} + \frac{e^{-z} z^m f^m(z)\, d\,z}{z - z_1} + \ldots \frac{e^{-z} z^m f^m(z)\, d\,z}{z - z_n}\right) \Phi(z, z_i)\right]$$
$$+ \Phi(z_0, z_i) \frac{e^{-z} z^m f^m(z)\, d\,z}{1.\,2\ldots(m-1)\,(z - z_0)} + \Phi(z_1, z_i) \frac{e^{-z} z^m f^m(z)\, d\,z}{1.\,2\ldots(m-1)\,(z - z_1)}$$
$$+ \ldots\ldots + \Phi(z_n, z_i) \frac{e^{-z} z^m f^m(z)\, d\,z}{1.\,2\ldots(m-1)\,(z - z_n)}$$

Pero el primer grupo del segundo miembro, prescindiendo de la constante $\frac{1}{1.\,2 \ldots m}$, es la diferencial de

$$e^{-z} z^m f^m (z)\, \Phi (z, z_i).$$

En efecto, el primer término es el que corresponde á la diferencial de $\Phi (z_1\, z_i)$; el segundo á la exponencial e^{-z}; y la última parte á $z^m f^m (z)$, que será

$$m\, [z\, f\,(z)]^{m-1} \frac{d.\, z\, f(z)}{d\, z}\, d\, z,$$

puesto que se sabe por teoría general de ecuaciones que la derivada de $z\, f\,(z)$ es

$$\frac{z\, f\,(z)}{z} + \frac{z\, f\,(z)}{z - z_1} + \frac{z\, f\,(z)}{z - z_2} + \ldots + \frac{z\, f\,(z)}{z - z_n}$$

Tendremos, pues, efectuando dicha sustitución, é integrando entre o y z_k, siendo z_k una de las raíces de (α),

$$\frac{1}{1.\,2 \ldots m} \int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^{m+1} f^{m+1} (z)\, d\, z}{z - z_i} =$$

$$- \frac{1}{1.\,2 \ldots m} \int_0^{z_k} d [e^{-z} z^m f^m (z)\, \Phi\, (z, z_i)] + \Phi\, (z_0, z_i) \frac{1}{(1.\,2 \ldots m-1)} \times$$

$$\int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m (z)\, d\, z}{z - z_0} + \Phi\, (z_1, z_i) \frac{1}{(1.\,2 \ldots m-1)} \int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m (z)\, d\, z}{z - z_1}$$

$$+ \ldots\ldots + \Phi\, (z_n, z_i) \frac{1}{1.\,2 \ldots (m-1)} \int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m (z)\, d\, z}{z - z_n},$$

ó, empleando las notaciones indicadas,

$$(m+1)_k^i = - \frac{1}{1.\,2 \ldots m} \int_0^{z_k} d\, [\, e^{-z} z^m f^m\, (z)\, \Phi\, (z, z_i)\,] +$$

$$\Phi\, (z_0, z_i)\, m_k^0 + \Phi (z_1, z_i) m_k^1 + \Phi\, (z_2, z_i)\, m_k^2 + \ldots\ldots + \Phi\, (z_n, z_i)\, m_k^n.$$

Ahora bien, el primer término del segundo miembro tiene por integral indefinida $e^{-z} z^m f^m (z) \Phi (z, z_i)$; y, poniendo los límites, vemos que se reduce á cero para $z = 0$, porque contiene el factor z^m; y para $z = z_k$, porque, siendo z_k una raíz de $f(z)$, el factor $f^m (z)$ también se anulará.

Verdad es que aplicamos á las expresiones imaginarias el teorema de las integrales definidas de variables reales; pero esto es legítimo en el caso actual.

En efecto, si se tiene $\int_0^{z_k} d\,N$, siendo N y z_k cantidades imaginarias, podremos dividir la curva de la integración en elementos, y representando por $o, z_1, z_2, z_3 \ldots\ldots z_k$ los valores sucesivos é infinitamente próximos de z, y por los subíndices los valores correspondientes de N resultará:

$$\int_0^{z_k} d\,N = \text{límite } (N_k - N_{k-1} + N_{k-1} - N_{k-2} + \ldots - N_1 + N_1 - N_0) = N_k - N_0.$$

Pero $N_k - N_0$ es el resultado de sustituir en la integral indefinida ambos límites y de restar uno de otro.

Anulando, pues, el primer término del segundo miembro se hallará:

$$(m+1)_k^{i} = \Phi (z_0, z_i)\, m_k^{0} + \Phi (z_1, z_i)\, m_k^{1} + \Phi (z_2, z_i)\, m_k^{2} + \ldots + \Phi (z_n, z_i)\, m_k^{n}.$$

Y como el número *m* es arbitrario, podemos sustituir m á $m + 1$, y tendremos finalmente:

$$m_k^{i} = \Phi (z_0, z_i)\,(m-1)_k^{0} + \Phi (z_1, z_i)\,(m-1)_k^{1} + \Phi (z_2, z_i)\,(m-1)_k^{2}$$
$$+ \ldots\ldots + \Phi (z_n, z_i)\,(m-1)_k^{n} \quad (4)$$

De esta manera el valor de la integral correspondiente á *m* se expresa en función de las integrales de la misma forma correspondientes á $m-1$; y como estas á su vez pueden expresarse en funciones de $(m-2)_k^{0}$ $(m-2)_k^{1} \ldots\ldots (m-2)_k^{n}$, tendremos el valor de m_k^{i} en valores de las precedentes.

Disminuyendo m de unidad en unidad, obtendremos finalmente m_k^i en valores de $(2)_k^0$, $(2)_k^1$, $(2)_k^2$ ..... $(2)_k^n$. Además, como todas estas relaciones son lineales, la expresión última será lineal, y los coeficientes de $(2)_k^0 \ldots (2)_k^n$, que resultarán de multiplicaciones de Φ, serán, como estos polinomios, funciones enteras y de coeficientes enteros de las raíces de (α).

Hemos expresado m_k^i de este modo:

$$m_k^i = V_0 . (2)_k^0 + V_1 . (2)_k^1 + V_2 . (2)_k^2 + \ldots\ldots + V_n (2)_k^n$$

siendo los coeficientes V funciones enteras y de coeficientes enteros de las raices z_1, z_2, z_3, z_n de (α); pero aun podemos expresar $(2)_k^0$, $(2)_k^1 \ldots (2)_k^n$ en función de $(1)_k^0$, $(1)_k^1$, $(1)_k^2 \ldots (1)_k^n$.

En efecto, hagamos $m = 1$ en la relación (2) y resultará

$$\frac{z f(z)}{z - z_i} = \Phi(z, z_i) - \frac{d \Phi(z, z_i)}{d z} - \left(\frac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_0, z_i)}{z - z_0} + \frac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_1, z_i)}{z - z_1} + \ldots\ldots \frac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_n, z_i)}{z - z_n} \right)$$

Multiplicando ambos miembros por $e^{-z} z f(z) d z$ y ordenando convenientemente, hallaremos que

$$\frac{e^{-z} z^2 f^2(z) d z}{z - z_i} = \Phi(z, z_i) e^{-z} z f(z) d z - \frac{d \Phi(z, z_i)}{d z} d z . e^{-z} z f(z) -$$
$$e^{-z} z f(z) d z \left(\frac{\Phi(z, z_i)}{z} + \frac{\Phi(z, z_i)}{z - z_1} + \frac{\Phi(z, z_i)}{z - z_2} + \ldots\ldots \frac{\Phi(z, z_i)}{z - z_n} \right)$$
$$+ e^{-z} z f(z) d z \left(\frac{\Phi(z_0, z_i)}{z - z_0} + \frac{\Phi(z_1, z_i)}{z - z_1} + \frac{\Phi(z_2, z_i)}{z - z_2} + \ldots + \frac{\Phi(z_n, z_i)}{z - z_n} \right)$$

Integrando entre 0 y z_k; anulando la primera parte del segundo miembro como hicimos antes; y empleando las notaciones abreviadas de siempre, obtendremos

$$(2)_k^i = \Phi(z_0, z_i)(1)_k^0 + \Phi(z_1, z_i)(1)_k^1 + \Phi(z_2, z_i)(1)_k^2 + \ldots + \Phi(z_n, z_i)(1)_k^n,$$

De suerte que podremos eliminar del último valor de m_k^i las cantidades $(2)_k^0$, $(2)_k^1 \ldots (2)_k^n$ en función de $(1)_k^0$, $(1)_k^1$,