CALCULO

DE

VARIACIONES.

CALCULO

DE

VARIACIONES.

LECCIONES ESPLICADAS EN LA ESCUELA DE INGENIEROS

DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

por

D. JOSÉ ECHEGARAY.

MADRID:
Imprenta de D. José C. de la Peña, Calle de Atocha núm. 149.
1858.

CÁLCULO DE VARIACIONES.

1. El método de las variaciones, debido á Lagrange, y que ha dado orígen á una rama importantísima del análisis matemático, pasa en la mayor parte de las obras que de esta materia se ocupan, por una especie de cálculo hypertrascendente, como ha dicho Mr. Cournot con tanta oportunidad en su escelente libro titulado *Teoria de las funciones y del cálculo infinitesimal*. Sencillo en el fondo; pero fundándose en transformaciones y artificios de análisis, ingeniosísimos sin duda alguna, mas un tanto nuevos para el alumno que por vez primera estudia esta teoria, aparece á su vista con formas vagas, indecisas, que no acierta á comprender y á definir bien.

Mi objeto en los presentes apuntes es, pues, evitar esta dificultad, poniendo en relieve, tanto como me sea posible, la dependencia natural, fácil, espontánea, si así puede decirse, que hay entre el cálculo de variaciones y la teoria de máximos y mínimos de funciones de dos ó mas variables. Con este objeto sustituiré á la trasformacion tan sencilla como fecunda en resultados de la *integracion por partes*, otro artificio, distinto en la forma aunque idéntico en el fondo, y que sino es tan espedito como aquel, es al menos mas natural y por lo tanto mas fácil de comprender para el alumno.

Antes de entrar en materia resumiré con la brevedad posible la teoria de máximos y mínimos de funciones de muchas variables; pues tal ha de ser mi punto de partida, y la base del método que mas adelante espondré.

PARTE PRIMERA.

Máximos ó mínimos de dos ó mas variables.

2. *Principio fundamental.* Una espresion de la forma

$$aA+bB+cC+dD+\ldots\ldots=0$$

en la que $a, b, c, d,\ldots\ldots$ son variables independientes entre sí, y $A, B, C, D,\ldots\ldots$ no contienen dichas magnitudes, no puede ser igual á cero para todos los valores de $a, b, c, d,\ldots.$ sin que se verifiquen las condiciones,

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ D=0\ldots.$$

En efecto, sean $a', b', c', d',\ldots\ldots$ y $a'', b', c', d',\ldots\ldots$ dos sistemas de valores de $a, b, c, d\ldots\ldots$; tendremos evidentemente,

$$a'A+b'B+c'C+d'D\ldots\ldots=0$$
$$a''A+b'B+c'C+d'D\ldots\ldots=0,$$

y restando de la 1.ª ecuacion la 2.ª,

$$(a'-a'')A=0:$$

ahora bien, como $a'-a''$ no es cero, puesto que a' y a'' son dos valores de a esencialmente distintos, deberá verificarse la condicion

$$A=0,$$

y del mismo modo podriamos probar que deben verificarse las condiciones

$$B=0,\ C=0,\ D=0\ldots.$$

3. *Metodo general.* Cuando una magnitud variable u

dependiente de otras magnitudes $x, y, z, \ldots$ en número n,—ya sean estas últimas independientes, ó bien existan relaciones cualesquiera que las enlacen,—pasa por un valor *máximo* ó *mínimo* correspondiente al sistema $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots$ este valor de u permanece *casi-constante* aun cuando $x, y, z, \ldots$ varien, siempre que las diferencias $x-a$, $y-b$, $z-c\ldots$ sean infinitamente pequeñas: ó lo que es igual, ***las variaciones de*** u ***á partir del valor máximo ó mínimo serán infinitamente pequeñas comparadas con las variaciones*** x—a, y—b, z—c,..... ***de las variables*** x, y, z,.....

Esta condicion general se espresa analíticamente igualando á *cero* la variacion de u á partir del máximo, toda vez que esta variacion es un infinitamente pequeño de órden superior; y se resuelve, segun mas adelante veremos, en otras varias condiciones, que sirven para determinar los valores de $x, y, z, \ldots$ correspondientes al máximo ó al mínimo.

4. Consideremos la funcion

$$u=f(x, y, z\ldots)$$

de las variables $x, y, z, \ldots$ y tratemos de determinar el valor máximo ó mínimo de u, asi como los valores correspondientes de $x, y, z, \ldots$

Representemos por $a, b, c, \ldots$ estos últimos, y supongamos que $x, y, z\ldots$ reciben á partir de $a, b, c, \ldots$ las variaciones infinitamente pequeñas $dx, dy, dz\ldots$: la variacion du será igual, designando en general por $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots$ las derivadas de f respecto á x, y, z, á la espresion siguiente,

$$du=f'_x(a, b, c\ldots)\,dx+f'_y(a, b, c\ldots)\,dy+f'_z(a, b, c\ldots)\,dz\ldots$$

Para que los valores $a, b, c, \ldots$ correspondan á un valor máximo ó mínimo de u debe verificarse [núm. 3] la condicion

(1) $du=0$ ó bien $f'_x\,(a,\,b,\,c...)\,dx+f'_y\,(a,\,b,\,c...)\,dy$

$$+f'_z\,(a,\,b,\,c.....)\,dz....=0$$

Ahora bien, si x, y, z..... son variables independientes, es decir, si dx, dy, dz...., son variaciones arbitrarias, y tales por consiguiente, que pueda variar una de ellas sin que las demas cambien, la condicion (1) no podrá quedar satisfecha sin que se reduzcan á cero los coeficientes de dx, dy, dz...... (núm. 2); luego tendremos

(2) $f'_x\,(a,\,b,\,c.....)=0;\quad f'_y\,(a,\,b,\,c.....)=0;$

$$f'_z\,(a,\,b,\,c.....)=0.....$$

Siendo n el número de variables independientes, n será tambien el número de las ecuaciones (2), y fácilmente podrán deducirse los valores de las n incógnitas a, b, c.....: sustituyendo en $u=f\,(x,y,\,z.....)$ por x, y, z.....; a, b, c....., se obtendrá asimismo el valor máximo ó mínimo de u.

5. Si x, y, z...., no son variables independientes, y existen por lo tanto ciertas relaciones entre dx, dy, dz..... no podrá aplicarse á la ecuacion (1) el principio del núm. 2, y deberemos modificar, segun esto, el método que acabamos de esponer.

Supongamos que existen entre x, y, z...., las relaciones:

(3) $\Phi\,(x,\,y,\,z....)=0;\ \Psi\,(x,\,y,\,z....)=0;\ \Pi\,(x,\,y,\,z....)=0....$ en número m, siendo $m<n$.

Las relaciones entre dx, dy, dz..... correspondientes al máximo ó al mínimo estarán espresadas por las m ecuaciones siguientes:

$$
(4)\left\{\begin{array}{l}
\Phi_x'(a,b,c....)\,dx+\Phi_y'(a,b,c.....)\,dy \\
\quad +\Phi_z'(a,b,c.........)\,dz.....=0. \\
\Psi_x'(a,b,c....)\,dx+\Psi_y'(a,b,c.....)\,dy \\
\quad +\Psi_z'(a,b,c.....)\,dz.....=0 \\
\Pi_x'(a,b,c.....)\,dx+\Pi_y'(a,b,c.....)\,dy \\
\quad +\Pi_z'(a,b\,c.....)\,dz.....=0
\end{array}\right.
$$

....

y puesto que entre $dx, dy, dz.....$ existen las m relaciones anteriores, solo podremos considerar $n—m$ de estas cantidades como independientes.

Ahora bien, ocurre desde luego que para reducir este caso al del número anterior bastaria: 1.° sacar de las m ecuaciones [4] los valores de m diferenciales en funcion de las $n—m$ restantes; 2.° sustituir en la condicion general (1) estos valores; 3.° ordenar la ecuacion que resultase respecto á las diferenciales independientes; y finalmente igualar á cero los coeficientes de estas diferenciales.

Sea

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz.....=0$$

la ecuacion que resulta de efectuar las tres primeras operaciones indicadas, en la cual A, B, C, son funciones de $a, b, c.....$

Las diferenciales que la ecuacion anterior contiene son independientes entre sí, luego aplicando el principio del número 2, tendremos las $n—m$ ecuaciones entre $a, b, c.....$

$$A=0;\ B=0;\ C=0.....$$

y uniendo á estas las m ecuaciones,

$\Phi(a,b,c....)=0;\ \Psi(a,b,c.....)=0;\ \Pi(a,b,c.....)=0....$ que resultan de sustituir en las ecuaciones de condicion [3] por $x, y, z.....$ $a, b, c.....$ tendremos n ecuaciones con n

incógnitas a, b, c....., cuyos valores deduciremos inmediatamente.

6. Sin embargo á este método, que es sin disputa el mas natural, y algunas veces el mas ventajoso, puede sustituirse en muchas ocasiones otro procedimiento mas sencillo y sobre todo mas elegante.

En efecto, deducir de las ecuaciones (4) los valores de m diferenciales para sustituirlos en la ecuacion (1), equivale á eliminar dichas m diferenciales entre las $m+1$ ecuaciones [4] [1], y esta eliminacion puede efectuarse con suma sencillez por el método de los coeficientes indeterminados.

Multipliquemos para esto cada una de las ecuaciones [4] por un factor indeterminado λ', λ'', λ'''..... sumemos todos los resultados asi obtenidos, y agreguemos á la suma el primer miembro de la ecuacion (1); llegaremos de este modo á la ecuacion siguiente:

$$(5)\quad \left(f'_x+\lambda'\Phi_x'+\lambda''\Psi_x'+\lambda'''\Pi_x'\ldots\right)dx$$

$$+\left(f'_y+\lambda'\Phi_y'+\lambda''\Psi_y'+\lambda'''\Pi_y'\ldots\right)dy+\ldots\ldots=0$$

Es claro que podremos determinar los valores de las m indeterminadas λ', λ'', λ'''..... con la condicion de que desaparezcan de la ecuacion (5) m diferenciales: bastará para esto igualar m coeficientes de la ecuacion (5) á cero, y deducir de estas m ecuaciones los valores de las m cantidades λ', λ'', λ'''..... Sustituyendo estos valores en la ecuacion [5], desaparecerán m diferenciales, y la ecuacion final que solo contendrá las $n-m$ diferenciales arbitrarias, y las cantidades a, b, c..... será equivalente á la ecuacion $A\,dx+B\,dy+C\,dz\ldots\ldots=0$ obtenida por el primer método.

El procedimiento que acabamos de esponer está reducido á lo siguiente: 1.° se obtiene la ecuacion (5) por el método ya indicado; 2.° se igualan m coeficientes á cero, y se deducen en funcion de a, b, c..... los valores de λ', λ'', λ'''...; 3.° se sustituyen estos valores en la ecuacion (5); 4.° se igualan á cero los $n-m$ coeficientes restantes, y uniendo á estas $n-m$ ecuaciones las condiciones generales $\Phi=0$, $\Psi=0$, $\Pi=0$..... se despejan entre las m ecuaciones resultantes los valores de a, b, c.....

Ahora bien, esto equivale á igualar á cero todos los coeficientes de la ecuacion (5), y, uniendo á este sistema de n ecuaciones las ecuaciones en número m

$\Phi(a, b, c.....)=0$; $\Psi(a, b, c.....)=0$; $\Pi(a, b, c......)=0$.....

despejar entre las $n+m$ que se obtengan las $n+m$ incógnitas a, b, c..... λ', λ'', λ'''.....

7. No creemos necesario insistir mas en la esposicion de los principios fundamentales del poblema de máximos y mínimos, pues basta para nuestro propósito haber recordado ligeramente lo mas esencial de esta teoría.

Por otra parte, como en el cálculo de variaciones, segun en las obras elementales se espone, solo se desarrolla la condicion comun al máximo y al mínimo, sin tratar de las condiciones que caracterizan cada uno de estos dos casos, tampoco indicaremos nada sobre este particular, concretándonos al primer punto, que es el único que la índole de este escrito y sus cortos límites nos permiten abordar.

SEGUNDA PARTE.

Consideraciones generales.

8. Si en la integral definida

$$M = \int_{x_0}^{x_m} V\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) dx,$$

en la cual V es funcion de la variable x, de la funcion arbitraria y, y de las derivadas $y', y'', y'''\ldots\ldots y,^{(n)}$ se sustituyen por y diversas funciones de x, $\varphi(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)\ldots\ldots$ en número infinito, y por $y', y'', y'''\ldots\ldots$ las derivadas correspondientes, —$\varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x)\ldots\ldots$ en la hipótesis $y=\varphi(x)$; $\varphi'_1(x)$, $\varphi_1''(x), \varphi_1'''(x),\ldots\ldots$ si se supone $y=\varphi_1(x)$; y asi succesivamente,— la funcion V se reducirá á una funcion inmediata de x, distinta en cada una de las hipótesis $y=\varphi(x)$, $y=\varphi_1(x)\ldots\ldots$ y la integral M tomará infinitos valores $M, M_1, M_2,\ldots\ldots$

Por ejemplo, si se supone $V = x^2 + y - xy'$; $x_0 = 1$; $x_m = 2$, tendremos,

$$M = \int_1^2 (x^2 + y - xy')\, dx,$$

y sustituyendo por y la serie arbitraria de funciones

$$\ldots\ldots \frac{1}{x},\ x,\ x^2,\ sen\ x\ldots\ldots$$

resultará para M la serie de valores numéricos:

$\frac{7}{8}+log.\ 4;\ \frac{7}{3};\ 0;\ \frac{7}{3}-2\ (cos.\ 2-cos.1)-2\,sen\ 2+sen\ 1.$

9. Resulta de las consideraciones que preceden, que la integral M puede considerarse como una *magnitud variable*; mas la idea de que una *cantidad varia*, implica esta otra idea: *que varia por algo*; es decir, supone la existencia de *una ó mas variables independientes*: ¿Cuál es segun esto la variable, ó la serie de variables de que M depende? La magnitud M varia con la funcion arbitraria $y=\varphi(x)$, y en este supuesto se dice *que la integral* M *es funcion de la funcion arbitraria* $y=\varphi(x)$.

Veremos mas adelante que esto equivale á considerar M como *funcion de infinitas variables.*

10. Acudamos al método de las representaciones geométricas para hacer mas palpables aun los resultados que preceden.

Fig. 1. Si representamos por *AB*, y *ab*, dos curvas cuyas ecuaciones son respectivamente $v=\mathrm{V}(x)$, $y=\varphi(x)$, la integral M estará representada por el área ABPQ comprendida entre las ordenadas AP, BQ correspondientes á las abscisas $\mathrm{OP}=x_0$, $\mathrm{OQ}=x_m$, el eje de las x, y la curva AB.

Puesto que la funcion V depende de la funcion φ, la forma de la curva AB dependerá asimismo de la curva *ab*, y podrá decirse abreviadamente que la curva AB es funcion de la *ab*.

Análogamente, el área ABPQ dependerá de la curva *ab*, y si esta última varia de forma por la ley de continuidad al pasar á las posiciones $a'\ b'$, $a''\ b''$....., el área $\mathrm{M}=\mathrm{ABPQ}$ variará tambien por la ley de continuidad: observacion importantísima, en que estriba por decirlo asi todo el cálculo de variaciones.

11. Entre los infinitos valores que recibe $M=\int_{x_0}^{x_m} V\, dx$,

cuando $\varphi(x)$ varia, habrá en general uno ó varios máximos ó mínimos: la determinacion de estos valores y de la funcion $\varphi(x)$ correspondiente es el objeto del cálculo de variaciones.

Diremos pues, que el cálculo de variaciones *tiene en general por objeto hallar los máximos ó mínimos de integrales definidas dependientes de funciones arbitrarias, y la forma de estas funciones.*

12. Teorema. 1.° Toda integral definida de la forma

$\int_{x_0}^{x_m} V(x, y, y' \ldots . y^{(n)})\, dx$, en que x_0 y x_m son cantidades

constantes, puede considerarse como funcion de $n+1$ series de variables.

2.° El número de variables que cada serie contiene es infinito.

3.° De estas $n+1$ series, solo una de ellas puede considerarse compuesta de variables independientes.

Para que la demostracion sea mas sencilla podremos suponer que el índice n es igual á dos unidades.

Descompongamos el intérvalo $x_m - x_0$ en m partes iguales, siendo m un número infinitamente grande, y designemos cada una de estas partes por dx: tendremos la serie

$$x_0,\ x_0+dx,\ x_0+2dx, x_0+3dx, \ldots\ldots\ x_m=x_0+mdx.$$

Supongamos que se fija arbitrariamente la serie de valores de y,

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots\ldots y_m$$

con la condicion de que las diferencias sucesivas $y_1-y_0, y_2-y_1, \ldots$ sean infinitamente pequeñas: estas series equivaldrán á una de las infinitas funciones $y=\varphi(x)$, y determinarán las dos nuevas series

$$y_0', y_1', y_2', y_3', \ldots\ldots y_m'$$
$$y_0'', y_1'', y_2'', y_3''', \ldots\ldots y_m''$$

cuyos términos generales son $y'_{p-1}=\dfrac{y_p-y_{p-1}}{dx}$; $y''_{p-1}=\dfrac{y'_p-y'_{p-1}}{dx}$.

Descomponiendo ahora la integral en sus elementos, resultará:

$$M = V(x_0, y_0, y_0', y_0'')\,dx + V(x_1, y_1, y_1', y_1'')\,dx$$
$$+V(x_2, y_2, y_2', y_2'')dx+\ldots.$$

En este valor de la integral entran las tres series de variables

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_m,$$
$$y_0', y_1', y_2', y_3', \ldots\ldots y_m',$$
$$y_0'', y_1'', y_2'', y_3'' \ldots\ldots y_m'',$$

de las cuales la primera está compuesta de infinitas variables independientes. Determinada esta serie, las dos restantes quedan determinadas tambien, asi como el valor M de la integral.

Generalizando las consecuencias que preceden resulta, que

la integral $\displaystyle\int_{x_0}^{x_m} V(x, y, y' \ldots y^{(n)})\,dx$ puede considerarse como

funcion de las $n+1$ series de variables:

(n). . . .
$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_m,$$
$$y_0', y_1', y_2', y_3', \ldots\ldots y_m',$$

....

$$\overset{(n)}{y_0}, \overset{(n)}{y_1}, \overset{(n)}{y_2}, \overset{(n)}{y_3}, \ldots\ldots \overset{(n)}{y_m},$$

la primera compuesta de variables independientes, y de funciones de $y_0, y_1, \ldots\ldots$ las demas.

13. Puede llegarse á estos mismos resultados por consideraciones geométricas en estremo sencillas.

Fig. 2. Supongamos que sobre el eje de las x se fijan los puntos $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m$ infinitamente próximos entre sí, y en cada una de las ordenadas $x_0 a$, $x_1 a', \ldots\ldots x_m a,^{(m)}$ los puntos a, a', $a'' \ldots\ldots a^{(m)}$ tambien infinitamente próximos: resultará la curva contínua $aa^{(m)}$ que será una de las comprendidas en la espresion $y = \varphi\ (x)$.

Pero una vez determinada la curva $\varphi\ (x)$, la tangente en cada punto, el radio de curvatura, y en general las derivadas $y', y'' \ldots$ quedan determinadas tambien; luego podremos mirar la serie infinita de valores de y, como una serie de infinitas variables independientes, y las series en y', $y'', \ldots\ldots y^{(n)}$, como otras tantas series de variables dependientes de los valores de y.

14. Pueden sustituirse á las variables de la 1.ª serie algunas de las comprendidas en las restantes, considerando las nuevas variables como independientes.

Sea por ejemplo la integral $\mathrm{M} = \int_{x_0}^{x_m} \mathrm{V}(x, y, y', y'', y''')\, dx$:

resulta de lo dicho que podremos mirar

$$y_0, y_0', y_0'', y_3, y_4 \ldots\ldots y_{m-4}, y_{m-3}, y_m'', y_m', y_m, \qquad \text{(i)}$$

como una serie de variables independientes.

Fig. 3. En efecto, y_0 determina la posicion del punto a; y_0' la direccion del elemento aa', y por lo tanto el punto a' corres-

pondiente á la abscisa x_0+dx; y_0'' el incremento de y_0' ó la direccion del lado infinitamente pequeño $a'a''$, es decir, el punto a''; y_3 el punto a'''; y así en adelante hasta y_{m-3} que fijará la posicion del punto b'''. Por otra parte y_m determina el punto b; y'_m el elemento bb' ó el punto b'; y_m'' el punto b'' del elemento $b'b''$.

De donde resulta que la serie (i) determina la forma de la curva ab y todos los elementos restantes de las series (n).

15. Si como acabamos de demostrar, la integral M equivale á una funcion de infinitas variables, y si por otra parte los métodos espuestos al principio de estos apuntes no dependen del número de variables, claro es que no habrá obstáculo alguno para aplicar á este caso los procedimientos esplicados sobre máximos y mínimos de funciones de muchas variables independientes.

Asi pues, hé aquí la marcha que deberemos seguir en todos los problemas del cálculo de variaciones:

1.° *Descompondremos la integral en m elementos, siendo m un número tan grande como se quiera.*

2.° *Consideraremos en la serie (n) $m+1$ de las variables que contiene como independientes, y las $(m+1)(n+1)-(m+1)=n(m+1)$ restantes como funciones de las primeras, y aplicaremos en este supuesto á la integral* M *el método esplicado en el núm* 5.

16. La aplicacion del procedimiento del núm. 5 supone que las variables independientes reciben á partir del máximo ó del mínimo una variacion infinitamente pequeña: asi por ejemplo la ordenada mp fig. 4, recibirá el incremento mm'; la tangente en el punto m esperimentará asimismo una variacion positiva ó negativa; y en general, todas las variables de la serie (n) recibirán incrementos ó decrementos infinitamente pequeños.

Estas variaciones se representan con la letra griega δ para distinguirlas de las diferenciales; y las espresiones δy, $\delta y'$, $\delta y''$.. $\delta y^{(n)}$ — que representan las variaciones de las ordenadas, y de las derivadas y', y''.....— se designan con los nombres *variacion y*, *variacion y', variacion y''*.....

17. Suponiendo que ab representa la curva correspondiente al máximo ó al mínimo, el conjunto de variaciones

$$\delta y_0,\ \delta y_1,\ \delta y_2,\ \delta y_3 \ldots\ldots \delta y_m$$

determina una segunda curva $a'\,b'$ infinitamente próxima á la primera, cuya ecuacion será $y=\varphi_1(x)$. Introduciendo la condicion $y=\varphi_1(x)$ en la integral M, resultará para esta integral la variacion δM, *que será infinitamente pequeña de órden superior si δy, $\delta y'$,..... son infinitamente pequeñas de primer órden.*

Máximos y mínimos de la integral $\int_{x_0}^{x_m} V\,dx$ cuando los límites x_0, x_m son constantes.

18. Supongamos para simplificar los cálculos que la funcion V solo contiene las tres primeras derivadas y', y'', y''': descomponiendo la integral en m elementos resultará,

$$\begin{aligned} M = & V(x_0, y_0, y_0', y_0'', y_0''',)dx + V(x_1, y_1, y_1', y_1'', y_1''')dx \\ & + \ldots\ldots V(x_m, y_m, y_m', y_m'', y_m''',)dx. \end{aligned}$$

Aplicando el principio del (núm. 3), y representando en general por Y, Y', Y'',... las derivadas de V respecto á y, y', y''..., y por $Y_p, Y_p', Y_p'', \ldots$ los valores de dichas derivadas para x_p, tendremos:

$$\begin{aligned}\delta M = & (Y_0 \delta y_0 + Y'_0 \delta y'_0 + Y''_0 \delta y''_0 + Y'''_0 \delta y'''_0) dx \\ & + (Y_1 \delta y_1 + Y'_1 \delta y'_1 + Y''_1 \delta y''_1 + Y'''_1 \delta y'''_1) dx \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (Y_m \delta y_m + Y'_m \delta y'_m + Y''_m \delta y''_m + Y'''_m \delta y'''_m) dx = 0,\end{aligned}$$

ó abreviadamente $\delta M = \int_{x_0}^{x_m} dx\ Y\ \delta y + \int_{x_0}^{x_m} dx\ Y'\ \delta y'$

$$+ \int_{x_0}^{x_m} dx\ Y''\ \delta y'' + \int_{x_0}^{x_m} dx\ Y''' \delta y''' = 0 \qquad (1)$$

19. *Consideraremos como variables independientes las comprendidas en la serie*

$$y_0, y'_0, y''_0, y_3, y_4 \ldots\ldots y_{m-4}, y_{m-3}, y''_m, y'_m, y_m,$$

y trataremos de eliminar de δM las restantes; para lo cual transformaremos cada una de las integrales de la fórmula (1) en otra, que solo contenga las variables independientes

$$y_0, y_0', y_0'', y_3, y_4 \ldots\ldots$$

20. Transformacion de $\int_{x_0}^{x_m} Y \delta y dx$ = Podremos cambiar en la integral $\int_{x_0}^{x_m} Y \delta y dx$ los límites x_0, y x_m, en $x_0 + 3dx$ y $x_m - 3dx$, con lo cual cometeremos un error infinitamente pequeño de se-

gundo órden representado por la suma $(Y_0\delta y_0+Y_1\delta y_1+Y_2\delta y_2$ $+Y_{m-2}\delta y_{m-2}+Y_{m-1}\delta y_{m-1}+Y_m\delta y_m)dx$, y por este medio habremos hecho desaparecer de la primera integral las variaciones $\delta y_1, \delta y_2, \delta y_{m-2}, \delta y_{m-1}$, no comprendidas en la serie del núm. 19.

Resultará, pues, representando por L la primera integral de la ecuacion (1)

$$L=\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx} Y\delta y dx \quad (L)$$

21. Transformacion de $\int_{x_0}^{x_m} Y'\delta y' dx$ = La integral propuesta, que designaremos por L, puede desarrollarse en la serie de términos $(Y_0'\delta y_0'+Y_1'\delta y_1'+Y_2'\delta y_2' \ldots\ldots Y'_{m-2}\delta y'_{m-2}$ $+Y'_{m-1}\delta y'_{m-1}+Y'_m\delta y'_m)dx=L'$, de la cual deberemos eliminar $\delta y_1'$, $\delta y_2' \ldots\ldots \delta y'_{m-1}$ en funcion de las variables independientes.

Fig. 5. 22. Sea AB la curva correspondiente al máximo ó al mínimo, y A′B′ otra curva infinitamente próxima á la primera: AA′ y BB′ serán dos variaciones consecutivas de y que representaremos por δy_{p-1}, δy_p, y podrá establecerse desde luego la relacion,

$$\delta y'_{p-1}=\text{tang. } B'A'C'-\text{tang. } BAC;$$

ó bien $\delta y'_{p-1}=\dfrac{B'C'}{dx}-\dfrac{BC}{dx}=\dfrac{B'C'-BC}{dx}=\dfrac{B'C'+BC'-(BC+BC')}{dx}$

$=\dfrac{BB'-AA'}{dx}$; y por último: $\delta y'_{p-1}=\dfrac{\delta y_p-\delta y_{p-1}}{dx}$.

Haciendo variar ahora p entre 1 y $m+1$, resultará:

$$\delta y_0' = \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{dx}; \quad \delta y_1' = \frac{\delta y_2 - \delta y_1}{dx}; \ldots\ldots$$

$$\delta y'_{m-1} = \frac{\delta y_m - \delta y_{m-1}}{dx}; \quad \delta y_m' = \frac{\delta y'_{m+1} - \delta y_m}{dx}$$

y sustituyendo estos valores en la integral $\int_{x_0}^{x_m} Y' \delta y' \, dx = L'$

obtendremos la espresion

$$L' = \left(Y_0' \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{dx} + Y_1' \frac{\delta y_2 - \delta y_1}{dx} + Y'_2 \frac{\delta y_3 - \delta y_2}{dx} \ldots \right.$$

$$\left. + Y'_{m-1} \frac{\delta y_m - \delta y_{m-1}}{dx} + Y'_m \frac{\delta y_{m+1} - \delta y_m}{dx} \right) dx$$

ó bien

$$L' = Y_m' \delta y_{m+1} - Y'_0 \delta y_0$$

$$- \left[\frac{Y_1' - Y_0'}{dx} \delta y_1 + \frac{Y_2' - Y_1'}{dx} \delta y_2 + \ldots\ldots \frac{Y'_m - Y'_{m-1}}{dx} \delta y_m \right] dx.$$

Supongamos ahora que el número de elementos de la integral crece hasta el infinito: dx se aproximará á *cero*; $\frac{Y'_p - Y'_{p-1}}{dx}$ tenderá hácia el limite $\frac{dY'_{p-1}}{dx}$; δy_{m+1} se reducirá á δy_m; y finalmente la parte relativa al paréntesis se reducirá á la integral $\int_{x_0}^{x_m} \frac{dY'}{dx} \delta y . dx$.

Tendremos pues

$$L' = Y_m' \delta y_m - Y_0' \delta y_0 - \int_{x_0}^{x_m} \frac{dY'}{dx} \delta y \, dx,$$

ó representando en general $\Psi(x_m) - \Psi(x_0)$ por la notacion $[\Psi(x)]_0^m$

$$L' = [Y' \delta y]_0^m - \int_{x_0}^{x_m} \frac{dY'}{dx} \delta y \, dx$$

23. Despreciando,—análogamente á lo que hemos hecho en el núm. 20,—algunos infinitamente pequeños de segundo órden, podremos sustituir el valor anterior de L′ por este otro:

$$L' = [Y' \delta y]_0^m - \int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx} \frac{dY'}{dx} \delta y dx : \quad (L')$$

espresion en la que solo entran las variaciones arbitrarias

$$\delta y_0, \delta y_3, \delta y_4 \ldots . \delta y_{m-4}, \delta y_{m-3}, \delta y_m$$

24.=Teorema. *Dedúcese ademas, de lo espuesto en los números 21, 22 y 23, que en general á la fórmula*

$$N=\int_{x_0}^{x_m} Z\delta z' dx$$

puede sustituirse esta otra fórmula:

$$N=[Z\delta z]_0^m-\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\frac{dZ}{dx}\delta z dx \quad [N]$$

25. Transformacion de $\int_{x_0}^{x_m} Y''\delta y'' dx$ = Designemos por

L'' el valor de esta integral; tendremos aplicando al caso actual la fórmula (N),

$$L''=[Y''\delta y']_0^m-\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\frac{dY''}{dx}\delta y' dx;$$

y análogamente, sin alterar los límites (núm. 20.), podrá sustituirse al término $\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\frac{dY''}{dx}\delta y' dx$, segun la fórmula (N), la

espresion

$$\left[\frac{dY''}{dx}\delta y\right]_0^m-\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\frac{d^2Y''}{dx^2}\delta y\, dx$$

y poniendo en L″ este valor resultará

$$L''=\left[Y''\,\delta y'-\frac{dY''}{dx}\,\delta y\right]_0^m+\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\frac{d^2Y''}{dx^2}\,\delta y dx: \qquad [L'']$$

espresion en la cual solo entran las variaciones arbitrarias

$$\delta y_0,\ \delta y_0',\ \delta y_3,\ \delta y_4 \ldots\ldots \delta y_{m-4},\ \delta y_{m-3},\ \delta y'_m,\ \delta y_m.$$

26. Transformacion de $\int_{x_0}^{x_m} Y'''\,\delta y'''dx$ = Designando por L‴ la integral anterior, aplicando el principio del núm. 24, y recordando que siempre pueden sustituirse los límites x_0, y x_m, por x_0+3dx, y x_m-3dx, y recíprocamente, tendremos:

$$L'''=[Y'''\delta y'']_0^m-\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\frac{dY'''}{dx}\delta y''dx=\left[Y'''\delta y''-\frac{dY'''}{dx}\delta y'\right]_0^m$$
$$+\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\frac{d^2Y'''}{dx^2}\delta y'dx$$

y finalmente:

$$L'''=\left[Y'''\delta y''-\frac{dY'''}{dx}\delta y'+\frac{d^2Y'''}{dx^2}\,\delta y\right]_0^m$$
$$-\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\frac{d^3Y'''}{dx^3}\delta y dx: \qquad [L''']$$

espresion en que solo entran las variaciones arbitrarias de la serie $\delta y_0, \delta y_0', \delta y_0'', \delta y_3, \delta y_4, \ldots\ldots \delta y_{m-4}, \delta y_{m-3}, \delta y_m'', \delta y_m', \delta y_m$.

27. Sustituyendo en la fórmula (1) los valores [L] [L′] [L″] [L‴] tendremos por último:

$$\delta M = \left[\left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \frac{d^2Y'''}{dx^2} \right) \delta y + \left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} \right) \delta y' + Y''' \delta y'' \right]_0^m \quad (2)$$

$$+ \int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx} \left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \frac{d^3Y'''}{dx^3} \right) \delta y dx = 0.$$

Fácil seria ya deducir por analogía la espresion de δM para cualquier valor de n: sin embargo, á fin de simplificar los cálculos conservaremos para el índice n el valor 3, con lo cual es evidente que no perderán nada de su generalidad las consecuencias á que bien pronto llegaremos.

28. Hemos supuesto hasta ahora, que las variaciones

$$\delta y_0,\ \delta y_0',\ \delta y_0'',\ \delta y_3 \ldots\ldots \delta y_{m-3},\ \delta y_m'',\ \delta y_m',\ \delta y_m$$

son independientes entre sí; sin embargo, puede suceder que las variaciones estremas δy_0, $\delta y_0'$, $\delta y_0''$, $\delta y_m''$, $\delta y_m'$, δy_m, tengan que satisfacer á ciertas relaciones, quedando arbitrarias las variaciones intermedias $\delta y_3 \ldots\ldots \delta y_{m-3}$, y en este caso habrá que aplicar el principio del núm. 5 como veremos más adelante.

29. Supongamos, *en primer lugar*, que todas las variaciones del núm. anterior son arbitrarias: ordenando el valor de δM por relacion á δy_0, $\delta y_0' \ldots\ldots$; desarrollando la integral en sus elementos; y representando en general por T la espresion

$\left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \frac{d^3Y'''}{dx^3} \right) dx$, por T_3, $T_4, \ldots\ldots, T_{m-4}$, T_{m-3} los valores de T para cada uno de los elementos de la integral, y por $A_0, B_0, \ldots\ldots$ los coeficientes de δy_0, $\delta y_0' \ldots\ldots$ tendremos:

$$\delta M = A_m\, \delta y_m + B_m\, \delta y'_m + C_m\, \delta y''_m - C_0\, \delta y_0'' - B_0\, \delta y_0' - A_0\, \delta y_0$$
$$+ T_3\, \delta y_3 + T_4\, \delta y_4 + \ldots\ldots = 0,$$

y segun el principio del núm. 4, obtendremos las condiciones siguientes:

$$(3)\ A_m=0;\ B_m=0;\ C_m=0;\ C_0=0;\ B_0=0;\ A_0=0;$$
$$T_3=0;\ T_4=0\ldots\ldots T_{m-4}=0;\ T_{m-3}=0$$

30 *Exámen de las condiciones* [3]. Al conjunto de las condiciones

$$T_3=0,\ T_4=0,\ldots\ldots T_{m-4}=0,\ T_{m-3}=0,$$

puede sustituirse la condicion única $T=0$, ó $Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} - \frac{d^3 Y'''}{dx^3} = 0$, considerando en esta espresion á x como variable entre los límites $x_0 + 3dx$, $x_m - 3dx$, ó bien x_0, y x_m. La espresion $Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} - \frac{d^3 Y'''}{dx^3} = 0$ contiene en general las variables $x, y, y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, y^{VI}$, y es por lo tanto una *ecuacion diferencial de 6.º órden con dos variables* x é y; hallando pues su integral general que representaremos por $\Phi\ (x, y, a, b, c, d, e, f,) = 0$ y que contendrá seis constantes arbitrarias a, b, c, d, e, f, la curva $\Phi = 0$ será la correspondiente al máximo ó al mínimo de la integral propuesta.

Por otra parte, entre las seis ecuaciones $A_m=0$; $B_m=0$; $C_m=0$; $C_0=0$; $B_0=0$; $A_0=0$, que contienen las seis incógnitas

y_0, y_0', y_0'', y_m, y_m', y_m'', podremos deducir el valor de estas seis incógnitas y por lo tanto determinar los valores de las constantes a, b, c, d, e, f.

En efecto, puesto que la curva $\Phi=0$ ha de pasar por los puntos (x_0, y_0) (x_m, y_m), tendremos las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(x_0, y_0, a, b, c, d, e, f)=0 \\ \Phi(x_m, y_m, a, b, c, d, e, f)=0\end{array}\right\}(\mathrm{a})$$

ademas, designando por $\Phi'=0$, y $\Phi''=0$ las relaciones que resultan en x, y, y', y x, y, y', y'', de diferenciar dos veces la ecuacion $\Phi=0$; ó lo que es igual, suponiendo

$$\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Phi}{dy}y'=\Phi', \text{ y } \frac{d^2\Phi}{dx^2}+2\frac{d^2\Phi}{dx\,dy}y'+\frac{d^2\Phi}{dy^2}y'^2+\frac{d\Phi}{dy}y''=\Phi''$$

tendremos las cuatro ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\Phi'(x_0, y_0, y_0', a, b, c, d, e, f)=0 \\ \Phi'(x_m, y_m, y'_m, a, b, c, d, e, f)=0 \\ \Phi''(x_0, y_0, y_0', y_0'', a, b, c, d, e, f)=0 \\ \Phi''(x_m, y_m, y'_m, y''_m, a, b, c, d, e, f)=0\end{array}\right\}(\mathrm{b})$$

Las seis ecuaciones (a) (b) determinan los valores de a, b, c, d, e, f y el problema queda completamente resuelto, en la parte que se refiere á la determinacion de la curva, ó de la relacion $\Phi(xy)=0$ correspondiente al máximo ó al mínimo de la integral.

31. Las condiciones obtenidas en los números anteriores no son *suficientes* para que la curva $\Phi=0$ corresponda á un máximo ó á un mínimo, ni dan á conocer tampoco cual de estos dos

casos tiene lugar. Será preciso ademas que $\delta^2 M$ sea *constantemente mayor ó menor que cero* para todas las relaciones $y=\Psi(x)$, que representen curvas infinitamente próximas á $\Phi=0$; ó que si se verifica la condicion $\delta^2 M=0$, se tenga al mismo tiempo $\delta^3 M=0$, y $\delta^4 M \lesseqgtr 0$; y asi sucesivamente.

Solo demostraremos la primera de estas proposiciones, por no detenernos demasiado, y por que ademas, esto hará ver que en nada varia,—aplicado á este caso,—el método de demostracion que se emplea para el de una ó mas variables independientes.

Sea $y=\Psi_{-3}(x)$; $y=\Psi_{-2}(x)\ldots y=\Psi_0(x)\ldots y=\Psi_2(x)$; $y=\Psi_3(x)$; una serie de funciones de x, de las cuales $y=\Psi_0(x)$ corresponde al máximo de M, y las demas representan curvas infinitamente próximas á $y=\Psi_0(x)$, y designemos por Q, P, N, M, L, K, H, los valores correspondientes de la integral: podremos formar la tabla siguiente de diferencias sucesivas:

funciones arbitrarias. .	Ψ_{-3}	Ψ_{-2}	Ψ_{-1}	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
valores de la integral. .	Q	P	N	M	L	K	H
variaciones primeras. .	δQ	δP	δN	δM	δL	δK	
variaciones segundas. .	$\delta^2 Q$	$\delta^2 P$	$\delta^2 N$	$\delta^2 M$	$\delta^2 L$		

Supongamos que M es *un valor máximo de la integral:* la segunda série, ó los valores de la integral serán *crecientes* hasta M, y á partir de este punto *decrecientes:* luego las diferencias primeras ó las variaciones δQ, δP, δN serán *positivas*, y *negativas* las variaciones δM, δL, δK; ademas la variacion de la integral en el intérvalo de δN á δM pasará por *cero*, segun hemos deducido ya de otras consideraciones espuestas al principio de este escrito. Ahora bien, puesto que las variaciones primeras forman una série decreciente dedúcese de aqui, que las variaciones segundas $\delta^2 Q$, $\delta^2 P$....... serán CONSTANTEMENTE NEGATIVAS para todas las funciones arbitrarias $\psi(x)$.

Del mismo modo probariamos que si el ***valor M es un minimo*** las variaciones segundas deberán ser CONSTANTEMENTE POSITIVAS.

32. De aquí resulta, que para conocer si la funcion deducida de $\delta M=0$ corresponde á un máximo ó á un mínimo de M, será preciso en general, y á menos que algunas condiciones particulares del problema no hagan inútil esta investigacion, será preciso decimos, determinar el valor de $\delta^2 M$; pero la determinacion de δ^2 es en estremo delicada, y exije desarrollos que no tienen cabida en los estrechos límites de estos apuntes.

33. Las condiciones indicadas en los números anteriores para el máximo ó el mínimo de una integral, pueden *caer en defecto* algunas veces, por ejemplo, cuando el máximo ó el mínimo es un máximo ó un mínimo singular; pero no nos ocuparemos de estos casos por razones semejantes á las indicadas en el número anterior.

34. Hemos dicho en el número 28, que tal vez existan relaciones particulares entre las variaciones de los puntos estremos, y debemos examinar qué modificaciones sufre en este caso el método general espuesto en los números precedentes.

35. *Teorema.* Sea

$$\delta M = \Big[A\ \delta y + B\ \delta y' + C\ \delta y'' \Big]_0^m + \int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx} T\ \delta y = 0$$

la variacion de la integral espresada en funcion de las variaciones independientes δy_0, $\delta y_0'$, $\delta y_0''$.......: no podrá verificarse la condicion $\delta M=0$ sin que separadamente se verifiquen las dos condiciones

$$\Big[\mathrm{A}\ \delta y+\mathrm{B}\ \delta y'+\mathrm{C}'\ \delta y''\Big]_{0}^{\mathrm{m}}=0;\int_{x_0+3dx}^{x_\mathrm{m}-3dx}\mathrm{T}\ \delta y=0$$

En efecto, sea *amnpb* fig. 6.ª, la curva correspondiente al máximo de la integral M, y *aa'a''cb''b'b*, *aa'a''c'b''b'b*,..... varias curvas infinitamente próximas á la primera, y tales que tengan entre sí en los dos puntos estremos *a*, *b*, un contacto de segundo órden, ó lo que es igual, cuatro elementos comunes: *aa'*, *a'a''* en *a*; *bb'*, *b'b''* en *b*.

La parte relativa á los límites

$$\mathrm{A}_\mathrm{m}\,\delta y_\mathrm{m}+\mathrm{B}_\mathrm{m}\,\delta y'_\mathrm{m}+\mathrm{C}_\mathrm{m}\,\delta y''_\mathrm{m}-\mathrm{A}_0\,\delta y_0-\mathrm{B}_0\,\delta y_0'-\mathrm{C}_0\,\delta y_0''$$

será la misma para las dos curvas *acb*, *ac'b*, puesto que y_0, y_0', y_0'', y_m, y'_m, y''_m, son las mismas para todas las curvas que pasan por *a* y *b* y tienen un contacto de segundo órden en dichos puntos; mas la integral $\int_{x_0+3dx}^{x_\mathrm{m}-3dx}\mathrm{T}\,\delta y$ será evidentemente distinta para cada una de las curvas *acb*, *ac'b*; si representamos por D la parte correspondiente á los límites, y por E', E'' los valores de la integral para cada una de las curvas antes indicadas *acb*, *ac'b*, resultará,—puesto que δ M es cero para todas las curvas infinitamente próximas á *anb*,— $\delta\,\mathrm{M}=\mathrm{D}+\mathrm{E}'=0$, y $\delta\ \mathrm{M}=\mathrm{D}+\mathrm{E}''=0$, y restando de la primera ecuacion la segunda $\mathrm{E}'-\mathrm{E}''=0$: resultado absurdo á menos que no se tenga $\mathrm{E}'=0$, $\mathrm{E}''=0$, y en general $\mathrm{E}=0$ para las curvas *acb*, *ac'b*, *ac''b*.....

Podremos pues deducir de lo que precede, que la condicion $\delta\mathrm{M}=0$ no puede verificarse á menos que las dos condiciones

$$\Big[\mathrm{A}\ \delta\ y+\mathrm{B}\ \delta\ y'+\mathrm{C}\ \delta\ y''\Big]_{0}^{\mathrm{m}}=0;\int_{x_0+3dx}^{x_\mathrm{m}-3dx}\mathrm{T}\ \delta\ y=0;$$

no tengan lugar á la vez.

35. Supongamos ahora, que entre $y_0, y_0', y_0'', y_m, y_m', y_m''$ existen las dos relaciones

$$\Phi = 0; \;\; \Psi = 0.$$

Puesto que en la ecuacion

$$A_m\,\delta y_m + B_m\,\delta y'_m + C_m\,\delta y''_m - A_0\,\delta y_0 - B_0\,\delta y_0' - C_0\,\delta y_0'' = 0$$

no son arbitrarias todas las variaciones δy_m, $\delta y'_m \ldots\ldots$, no podrán aplicarse al principio del núm. 2 y será preciso acudir al método espuesto en el núm. 5.

Tomando las variaciones de Φ, y Ψ tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi'_{y_0}\,\delta y_0 + \Phi'_{y_0'}\,\delta y_0' + \Phi'_{y_0''}\,\delta y_0'' + \Phi'_{y_m}\,\delta y_m + \Phi'_{y'_m}\,\delta y'_m \\ + \Phi'_{y''_m}\,\delta y''_m \qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\ \Psi'_{y_0}\,\delta y_0 + \Psi'_{y_0'}\,\delta y_0' + \Psi'_{y_0''}\,\delta y_0'' + \Psi'_{y_m}\,\delta y_m + \Psi'_{y'_m}\,\delta y'_m \\ + \Psi'_{y''_m}\,\delta y''_m \qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \end{array}\right\} (\Phi\ \Psi)$$

y eliminando entre las ecuaciones $(\Phi\ \Psi)$, y la ecuacion $A_m\,\delta y_m + \ldots = 0$, dos de las variaciones $\delta y_0\ \delta y_0' \ldots$ — por ejemplo, $\delta y_0''$, $\delta y''_m$ que consideraremos como funciones de δy_0, $\delta y_0'$, δy_m, $\delta y'_m$,— tendremos una ecuacion entre las cuatro variaciones restantes, que podremos representar por

$$A'_m\,\delta y_m + B'_m\,\delta y'_m + A_0'\,\delta y_0 + B_0'\,\delta y_0' = 0,$$

en la cual los coeficientes A'_m, B'_m, A_0', B_0' serán funciones de las seis cantidades y_0, y_0', y_0'', y_m, y'_m, y''_m: en la espresion anterior δy_m, $\delta y'_m$, δy_0, $\delta y_0'$, son variaciones independientes, y por lo tanto tendremos

$$A'_m = 0; \;\; B'_m = 0; \;\; A_0' = 0; \;\; B_0' = 0.$$

Las cuatro ecuaciones anteriores, y las dos $\Phi=0$, $\Psi=0$, darán los valores de las seis incógnitas y_0, y_0'....., y conocidas estas cantidades podremos aplicar el método del número 30:

$Y-\frac{dY'}{dx}+\frac{d^2Y}{dx^2}-\frac{d^3Y}{dx^3}=0$ hará pues conocer la ecuacion de la curva correspondiente al máximo ó al mínimo, y las ecuaciones (a) y (b) determinarán las constantes a, b, c, d, e, f.

Un método análogo se aplicaria al caso en que fuesen 1, 3, 4, 5 las ecuaciones de condicion.

Si en vez de las dos ecuaciones $\Phi=0$, $\Psi=0$, se diesen seis,—es decir, tantas como variaciones δy_0, $\delta y_0'$.....,— entre estas seis ecuaciones determinariamos las seis incógnitas y_0, y_0'..... y fácilmente hallariamos las constantes a, b, c, d, e, f. En cuanto á la condicion relativa á los límites, siendo y_0, y_0',..... *constantes*, δy_0, $\delta y_0'$, se reducirian á cero y dicha condicion se verificaria por sí misma.

Máximos y mínimos de la integral $\int_{x_0}^{x_m} Vdx$ cuando los límites x_0 y x_m son variables.

36. Sea ab (fig. 7.ª) la curva correspondiente al máximo de la integral $M=\int_{x_0}^{x_m} Vdx$, cuya ecuacion supondremos que es $y=\varphi(x)$, y AB la que tiene por ecuacion $v=V(x)$, ó sea el resultado de sustituir en $V(x, y, y', y'', y''')$, en vez de y, y', y'', y''', las funciones

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \varphi'''(x):$$

segun hemos visto en el núm. 10 el valor M de la integral estará espresado por el área APBQ.

Consideremos otra curva $a'b'$ infinitamente próxima á ab, y la curva correspondiente A′B′: el nuevo valor de la integral será igual al de el área A′P′B′Q′, y por consiguiente δM será igual á la diferencia de las áreas A′P′B′Q′ y APBQ. Despreciando los infinitamente pequeños de segundo órden ArA′, BDsB′ tendremos:

$$\delta M = BQQ's - APP'r + A'DBC,$$

y representando por δx_0, y δx_m las variaciones de las abscisas límites resultará:

$$\delta M = V_m\, \delta x_m - V_0\, \delta x_0 + A'DBC = [V\, \delta x]_0^m + A'DBC.$$

La parte A′DBC representa la diferencia de las áreas A′P′QD y CP′QB, ó sea la variacion de la integral $\int_{x_0+\delta x_0}^{x_m} Vdx$ en que los límites $x_0 + \delta x_0$ y x_m *permanecen constantes*; por otra parte, podremos sustituir al límite inferior $x_0 + \delta x_0$ el límite x_0 cometiendo un error infinitamente pequeño de segundo órden, así pues, la condicion del máximo ó del mínimo será,

$$\delta M = \Big[V\,\delta x\Big]_0^m + \delta . \int_{x_0}^{x_m} Vdx = 0;$$

ó bien, poniendo por $\delta \int_{x_0}^{x_m} Vdx$ su valor (núm. 27):

$$\delta M\left[V\delta x+\left(Y'-\frac{dY''}{dx}+\frac{d^2Y'''}{dx^2}\right)\delta y+\left(Y''-\frac{dY'''}{dx}\right)\delta y'\right.$$

$$\left.+Y'''\delta y''\right]_0^m+\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\left(Y-\frac{dY'}{dx}+\frac{d^2Y''}{dx^2}-\frac{d^3Y'''}{dx^3}\right)\delta y dx=0$$

37. En la ecuacion anterior δy, $\delta y'$, $\delta y''$,..... representan las variaciones de las magnitudes y, y', y'',..... al pasar de un punto m de la curva ab al punto m_1 de la curva $a' b'$ correspondiente á la misma abscisa; ó lo que es igual, se supone que, al transformarse la curva ab en otra infinitamente próxima $a' b'$, todos sus puntos han descrito paralelas al eje de las y; podriamos, sin embargo, generalizar algo esta hipótesis suponiendo que un punto m de la primera curva se trasladaba describiendo una curva cualquiera al punto m'; en este caso, no solo variaria la ordenada y, sino que tambien la abscisa x esperimentaria una variacion mp, y fácilmente pueden introducirse estas nuevas variaciones en la fórmula obtenida anteriormente. En efecto, puede establecerse desde luego la relacion $m'n=m'p-np=m'p-y'mp$, ó bien, representando por δ_1 las nuevas variaciones.

$$\delta y=\delta_1 y-y'\delta_1 x:$$

De aquí resulta,— aplicando á las curvas derivadas $y'=\varphi_1'(x)$, $y''=\varphi_1''(x)$........ el mismo método,— $\delta y'=\delta_1 y'-y''\delta_1 x$; $\delta y''=\delta_1 y''-y'''\delta_1 x$...... Sustituyendo estos valores en δM, y suprimiendo el subindice de δ tendremos:

$$\delta M=\left[V\delta x+\left(Y'-\frac{dY''}{dx}+\frac{d^2Y'''}{dx^2}\right)(\delta y-y'\delta x)\right.$$

:

$$+\left(Y''-\frac{dY'''}{dx}\right)(\delta y'-y''\,\delta x)+Y'''(\delta y''-y'''\,\delta x)\Big]_0^m$$

$$+\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\left(Y-\frac{dY'}{dx}+\frac{d^2Y''}{dx^2}-\frac{d^3Y'''}{dx^3}\right)(\delta y-y'\,\delta x)dx=0$$

Los métodos espuestos en el núm. 28 y siguientes serán los mismos para este caso que para el de los límites constantes, sin mas diferencia, que la que naturalmente ha de resultar de la nueva forma de δM.

El principio del núm. 35 subsiste pues aquí, y por lo tanto deberán igualarse á cero separadamente la parte relativa á los límites, y la integral $\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}$. Esta última condicion no podrá quedar satisfecha á menos que no se tenga $Y-\frac{dY'}{dx}+\frac{d^2Y''}{dx^2}-\frac{d^3Y'''}{xd^3}=0$, ecuacion diferencial de sesto órden que dará la ecuacion de la curva correspondiente al máximo ó al mínimo:en cuanto á las constantes se determinarán por la condicion relativa á los límites

$$X_m\,\delta x_m+A_m\,\delta y_m+B_m\,\delta y'_m$$
$$+C_m\,\delta y''_m-X_0\,\delta x_0-A_0\,\delta y_0-B_0\,\delta y'_0-C_0\,\delta y''_0=0,$$

ó por esta condicion combinada con otras relaciones entre $x_0, y_0, y_0', y_0'', x_m, y_m, y_m', y_m''$, si estas relaciones existen.

Supongamos, por ejemplo, (fig. 8.) que la curva correspondiente al máximo ó al mínimo ha de satisfacer á la siguiente condicion: « que sus puntos estremos a, b hayan de estar sobre las curvas R_0S_0, R_m, S_m, cuyas ecuaciones designaremos por $y=f_0(x)$; $y=f_1(x)$: es evidente que las curvas $a'b'$, $a''b''$, infinitamente próximas á ab deberán satisfacer á la misma condicion, luego x_0, y_0, x_m, y_m, y las variaciones δx_0, δy_0, δx_m δy_m, deberán asímismo satisfacer á las ecuaciones $y=f_0(x)$; $y=f_1(x)$; $dy=f'_0(x)dx$; $dy=f'_1(x)dx$; resultará pues:

$$y_0=f_0(x_0);\ y_m=f_m(x_m);\ \delta y_0=f'_0(x_0)\,\delta x_0;\ \delta y_m=f'_m(x_m)\,\delta x_m$$

Sustituyendo los valores de δy_0 δy_m (núm. 5.) en la ecuacion $X_m\,\delta x_m+A_m\,\delta y_m+\ldots\ldots=0$, ordenando el resultado que se obtenga respecto á δx_0, $\delta y_0'$, $\delta y_0''$, δx_m, $\delta y_m'$, $\delta y_m''$, igualando á cero los seis coeficientes de estas variaciones, y combinando estas seis ecuaciones con las ecuaciones $y_0=f_0(x_0)$; $y_m=f_m(x_m)$ podremos hallar los valores de las ocho incógnitas x_0, y_0, y_0', y_0'', x_m, y_m, y_m', y_m'', y por lo tanto los valores de las seis constantes a, b, c, d, e, f (núm. 30).

38. Pudiera suceder que V contuviese alguno de los valores estremos x_0, y_0.....—por ejemplo, x_0,—y en este caso δM contendria un término mas de la forma $\int \frac{dV}{dx_0}\,\delta x_0 dx = \delta x_0 \int \frac{dV}{dx_0}\,dx$, que deberia agregarse á la parte relativa á los límites.

Como consecuencia de los métodos hasta aquí espuestos indicaremos algunos teoremas importantes, que hubieran podido servir de base al problema de las variaciones si directamente hubieramos dado su demostracion; pero cuya razon de ser, si asi puede decirse, no se hubiera comprendido tan fácilmente en un principio como ahora, por mas que de seguir este método se simplificase algo la esposicion de los procedimientos esplicados.

39. *Teorema* 1.° Cuando los límites de la integral $\int_{x_0}^{x_m} V dx$ son constantes, y dx es nula, en toda la série de los cálculos pueden invertirse los signos *variacion* y *diferencial*: es decir, que se tiene $\delta\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n \delta y}{dx^n}$.

En efecto, resulta de lo dicho en el número 22 que $\delta y'_{p-1}=\frac{\delta y_p-\delta y_{p-1}}{dx}=\frac{d\,\delta y_{p-1}}{dx}$; y en general

$$\delta\frac{dy}{dx}=\frac{d\,\delta y}{dx}.$$

luego podremos establecer la serie siguiente de ecuaciones:

$$\delta\frac{dy^n}{dx^n}=\delta\frac{dy^{(n-1)}}{dx}=\frac{d\,\delta y^{(n-1)}}{dx}=\frac{d\,\delta\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}{dx}=\frac{d\,\frac{d\,\delta y^{n-2}}{dx}}{dx}=\frac{d^2\,\delta y^{(n-2)}}{dx^2}$$

$$=\frac{d^2\,\delta\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}}{dx^2}=\frac{d^3\,\delta y^{n-3}}{dx^3}\cdots\cdots$$

..... y finalmente $\delta\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n\,\delta y}{dx^n}$.

40. *Teorema* 2.° Aplicando el método de la *integracion por partes* se puede eliminar bajo el signo integral la variacion de una funcion derivada en valores de la variacion de la funcion primitiva.

Se tiene (núm. 24) $\int_{x_0}^{x_m} Z\,\delta z' dx = \Big[Z\,\delta z \Big]_0^m - \int_{x_0}^{x_m} \frac{dZ}{dx}\,\delta z dx$

ó bien $\int_{x_0}^{x_m} Z \frac{d\,\delta z}{dx} dx = \Big[Z\,\delta z \Big]_0^m - \int_{x_0}^{x_m} \frac{dZ}{dx}\,\delta z dx$, espresion en que se observa, que el segundo miembro es el resultado de integrar por partes el primero, tomando $\frac{d\,\delta z}{dx}\,dx$ por parte integrable.

41. *Teorema* 3.° Dada una integral $\int_{x_0}^{x_m} V dx$ siempre es posible invertir los signos $\int$, δ,— aun cuando los límites sean variables,—considerando dx como variable de una curva á otra. En efecto descompongamos la integral en sus elementos y representemos el producto Vdx por U; tendremos,

$$M = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots$$

y suponiendo que varía la funcion y, y sus derivadas; x y dx; y representando por M', U_0', U_1'..... los nuevos valores de M y de los elementos de la integral, resultará $M' = U_0' + U_1' + U_2' + U_3' + \ldots\ldots$ y restando de esta ecuacion la anterior, obtendremos para $M' - M$ el valor

$$M' - M = (U_0' - U_0) + (U_1' - U_1) + (U_2' - U_2) + \ldots\ldots$$

ó bien $\delta M = \delta U_0 + \delta U_1 + \delta U_2 + \delta U_3 + \ldots\ldots = \int_{x_0}^{x_m} \delta U:$

y finalmente $\delta \int_{x_0}^{x_m} U = \int_{x_0}^{x_m} \delta U.$

42. *Teorema* 4.° Representando δ y δ_1 las variaciones de las variables $y, y', y'' \ldots\ldots$ — 1.° en el caso en que se considere x como constante; 2.° suponiendo que x varía, — tendremos en general $\delta y^{(n)} = \delta_1 y^{(n)} - y^{(n+1)}\, \delta x$ (núm. 37).

Máximos y mínimos relativos.

43. Consideremos la integral $\int_{x_0}^{x_m} L\,(x, y, y', y'', y''')\, dx,$

en la que supondremos que el coeficiente diferencial L solo contiene la funcion y, y las derivadas y', y'', y''': es evidente, segun se deduce de lo dicho en los números 8, 9, 10, que existen infinitas funciones arbitrarias, $y = \varphi(x)$, $y = \varphi_1(x) \ldots\ldots$ tales que sustituidas en la integral $\int_{x_0}^{x_m} L\, dx$, dan un resultado constantemente igual á c.

Ejemplos.—1.° Las funciones $y = e^x, y = 2e^x, y = 3e^x \ldots\ldots$ sustituidas en la integral $\int_0^1 (y - 2y' + y'')\, dx$ dan siempre un resultado igual á cero.

2.° Si representamos por $y = \varphi(x), y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x) \ldots\ldots$ las ecuaciones de infinitas curvas *amb*, *am'b* *am''b*. (fig. 9),....

tales que sus longitudes entre los puntos a, b sean iguales á c, la integral $\int_{x_0}^{x_m} \sqrt{1+y'^2}\, dx$ será constantemente igual á c, para todos los valores de y',—$y' = \varphi'(x)$, $y' = \varphi_1'(x)$....,—y por lo tanto para todas las curvas $y = \varphi(x)$, $y = \varphi_1(x)$.....

Y así pudieramos multiplicar los ejemplos hasta el infinito.

44. Supongamos ahora, que se sustituyen las funciones $y = \varphi(x)$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$....... en otra integral $\int_{x_0}^{x_m} V(x, y, y', y'', y''')\, dx$; su valor variará por ley de continuidad si φ, φ_1, φ_2..... representan curvas infinitamente próximas, y si designamos por M, M_1, M_2..... la série de valores que recibe $\int_{x_0}^{x_m} V\, dx$ es evidente, que esta série presentará en general uno ó varios máximos ó mínimos: estos máximos ó mínimos reciben el nombre de *máximos ó mínimos relativos*. Así pues, se dice que se busca un máximo ó un mínimo relativo, cuando se trata de determinar una funcion $y = \varphi(x)$, que haga un máximo ó un mínimo la integral $\int_{x_0}^{x_m} V\, dx$, satisfaciendo á la vez á la condicion $\int_{x_0}^{x_m} L\, dx = c$.

45. Sea $M = \int_{x_0}^{x_m} V\, dx$ la integral cuyo máximo ó mínimo relativo buscamos: para que M pase por un máximo ó por un mínimo, deberá verificarse la condicion general (número 3)

$\delta M=0$, y suponiendo que los límites sean constantes resultará (núm. 29).

$\delta M=A_m\,\delta y_m+B_m\,\delta y'_m+C_m\,\delta y''_m-A_0\,\delta y_0-B_0\,\delta y_0'-C_0\,\delta y_0''$ $+T_3\,\delta y_3+T_4\,\delta y_4+\ldots\ldots=0$; mas en este caso las varianes δy_m, $\delta y'_m\ldots\ldots$, no son independientes, y el principio del núm. 4 no tiene aplicacion. En efecto, establecer un sistema de valores determinados para y_m, y_m', $y_m''\ldots\ldots$ es fijar de un modo invariable la curva *acb* figura 10, infinitamente próxima á la *anb* del máximo ó del mínimo, en una palabra la curva de la variacion δM; pero en el caso que nos ocupa no es condicion suficiente para el trazado de la curva *acb* que se separe infinitamente poco de la *anb*, es ademas indispensable que dé para la integral $\int_{x_0}^{x_m} L\,dx$ un valor constante c, ó lo que es igual, que la variacion de la integral $\int_{x_0}^{x_m} L\,dx$ sea rigorosamente nula.

Representando por n esta integral, y por a_m, b_m, c_m, a_0, b_0, c_0, t_3, $t_4\ldots\ldots$ coeficientes análogos á los A_m, B_m, C_m, A_0, B_0, C_0, T_3, $T_4\ldots\ldots$, la variacion de n podrá espresarse por la fórmula

$$\delta n=a_m\,\delta y_m+b_m\,\delta y'_m+c_m\,\delta y''_m-a_0\,\delta y_0-b_0\,\delta y_0'-c_0\,\delta y_0'' \\ +t_3\,\delta y_3+t_4\,\delta y_4+\ldots\ldots=0$$

y será preciso que las variaciones δy_m, $\delta y'_m\ldots\ldots$, satisfagan á la vez á las dos condiciones $\delta M=0$, $\delta n=0$.

46. Parece á primera vista, que seria suficiente para reducir este caso al del núm. 4, eliminar entre las dos ecuaciones $\delta M=0$, $\delta n=0$, una de las variaciones de la série δy_m, $\delta y'_m$

...... y considerar las restantes como independientes; pero debemos observar, que si en la ecuacion $\delta n=0$ se supone, que todas las variaciones menos una, — δy_p por ejemplo, — son arbitrarias, esta ecuacion no podrá quedar satisfecha para valores infinitamente pequeños de δy_p. En efecto, fijando arbitrariamente todas las variaciones δy_m, $\delta y'_m$..... menos δy_p, la suma de todos los términos, esceptuando $t_p\ \delta y_p$, será un infinitamente pequeño de primer órden α, luego

$$\delta y_p = -\frac{\alpha}{t_p} = \text{una cantidad finita}$$

No podremos, pues, fijar arbitrariamente toda la curva *acb*, (fig. 10.) menos un arco infinitamente pequeño, sin faltar á la condicion $\delta n=0$, y únicamente podrán considerarse como arbitrarias las variaciones correspondientes á longitudes finitas *ad*, *bf*, etc. dejando indeterminadas las que se refieran á otras porciones finitas *df* de dicha curva. Mas por otra parte, si es posible eliminar entre $\delta M=0$, $\delta n=0$, un número infinito de variaciones δy_p..... correspondientes á una porcion finita de la curva *acb*, podrán igualarse á *cero* los coeficientes de las restantes, y aplicarse por completo el método del núm. 6.

Ahora bien, esta eliminacion es posible, pues, como vamos á demostrar, la relacion $\frac{T}{t}$ es una cantidad constante λ, para todos los valores de x comprendidos entre los límites x_0, x_m, por lo tanto multiplicando δn por dicha constante λ, y restando el resultado del primer miembro de δM, tendremos $\delta M - \lambda \delta n = 0$: ecuacion que se descompone, en virtud de la condicion $T - t\lambda = 0$, en las dos condiciones siguientes:

$$\Big[(A-\lambda a)\,\delta y+(B-\lambda b)\,\delta y'+(C-\lambda c)\,\delta y''\Big]_0^m=0\,;\ T-\lambda\, t=0.$$

La segunda es una ecuacion diferencial, que dará por los métodos de integracion la ecuacion finita de la curva correspondiente al máximo ó al mínimo, y la primera servirá para determinar las constantes de la integracion.

Antes de pasar mas adelante demostraremos el teorema arriba indicado.

47. *Teorema*. La relacion $\frac{T}{t}$, ó su equivalente $\frac{T'}{t'}$, es constante para todos los valores de x comprendidos entre x_0 y x_m.

[Representamos por T′ y t' los cuocientes $\frac{T}{dx}$, $\frac{t}{dx}$, ó sean

$Y-\frac{dY'}{dx}+\frac{d^2Y''}{dx^2}-\frac{d^3Y'''}{dx^3}$, y la espresion análoga de la integral

$\int_{x_0}^{x_m} Ldx$.]

La demostracion de este teorema se funda en el siguiente principio: «toda curva infinitamente próxima á la del máximo ó mínimo, y que satisfaga á la condicion $\int_{x_0}^{x_m} Ldx = constante$, debe satisfacer á la condicion $\delta M=0$; ó lo que es igual, todo sistema de variaciones δy_3, δy_4,..... infinitamente pequeñas, que cumplan con la condicion $\delta n=0$, deben asímismo cumplir con la segunda condicion $\delta M=0$.»

Los coeficientes T′, t', son tan solo funciones de x, y, y'...., (refiriéndose estas cantidades á la curva del máximo ó del mínimo) y por lo tanto independientes de δy_0, $\delta y_0'$, $\delta y_0''$, δy_3, δy_4, ... luego si se prueba para un sistema de variaciones arbitrarias, que la proposicion «$\frac{T'}{t'}=constante$» es verdadera, quedará demostrado el teorema en general.

Ahora bien, podemos suponer que todas las curvas *acb*, (fig. 10.) correspondientes á δM tienen un contacto de segundo órden con la curva del máximo ó del mínimo en *a* y *b*, luego $y_m, y_m', y_m'', y_0, y_0', y_0''$, son cantidades invariables, sus variaciones serán nulas, y la parte relativa á los límites desaparecerá en las ecuaciones $\delta M=0$, $\delta n=0$; estas ecuaciones se reducirán pues á $T_3\ \delta y_3 + \ldots.. = 0$, $t_3\ \delta y_3 + \ldots.. = 0$; ó bien á

$$\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx} T'dx\ \delta y=0, \int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx} t'dx\ \delta y=0.$$

Supongamos que la relacion $\frac{T'}{t'}$ no es constante, representemos por $f(x)$ (fig. 11.) su valor, y sea $a'b''$ la curva cuya ordenada hemos designado por $f(x)$; fácilmente podremos fijar cuatro límites de x, x_0', x'_m, x_0'', x''_m comprendidos entre x_0 y x_m; suficientemente próximos dos á dos, para que en los intérvalos $x''_m - x_0''$, $x'_m - x_0'$, no cambien de signo $f(x)$, t' y por lo tanto $f(x)t' = T'$; y tales ademas, que el valor mínimo $a''x_0''$ de x en el intérvalo $x''_m - x_0''$ sea superior al valor máximo $b'x'_m$ de dicha ordenada en el intérvalo $x'_m - x_0'$.

Admitiremos, para fijar las ideas, que $f(x)$ entre x''_m y x_0' es constantemente positiva.

Designando por h una constante comprendida entre $b'x'_m$, y $a''x_0''$, podremos establecer las dos condiciones:

(h) $h>f(x)$ para todo valor de x comprendido entre x'_0, y x_m'.
y $h<f(x)$ para todo valor de x comprendido entre x''_0, y x_m'';

Consideremos ahora una curva *agb* (fig. 12.) infinitamente próxima á la curva del máximo ó del mínimo, y descompongámosla en cinco arcos *ae*, *ef*, *fg*, *gh*, *hb*, de los cuales el *segundo* y el *cuarto* correspondan á los límites x_0', x_m'; x_0'', x_m'': es evidente que podremos asimismo considerar descompuestas las dos integrales $\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx} T'dx\,\delta y$; $\int_{x_0+3d}^{x_m-3dx} t'dx\,\delta y$ en cinco integrales parciales correspondientes á los cincos arcos de la curva *ab*. Cambiemos el arco *ef* en otro infinitamente próximo *edf*, y el *gh* en *gd'h*, de tal modo, que si por la primera alteracion $\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx} t'dx\,\delta y$ recibe un incremento α por la segunda esperimente un decremento $-\alpha$, lo cual podrá evidentemente conseguirse, pasando de la primera curva *afgb*, á la segunda *add'b*, por variaciones de δy constantemente positivas ó negativas en los intervalos $x'_m - x_0'$; $x''_m - x_0''$;

Resulta de lo dicho:

$$\left.\begin{array}{l} \delta \int_{x_0'}^{x'_m} t'\,dx\,\delta y = \int_{x_0'}^{x'_m} t'dx\,\delta(\delta y) = \alpha \\ \delta \int_{x_0''}^{x''_m} t'\,dx\,\delta y = \int_{x_0''}^{x''_m} t'dx\,\delta(\delta y) = -\alpha \end{array}\right\} (\alpha)$$

y por lo tanto la nueva curva *add'b* satisface á la condicion $\delta n = 0$: en efecto, las tres integrales parciales,

$$\int_{x_0+3dx}^{x_0'} t'\,dx\,\delta y;\quad \int_{x'_m}^{x_0''} t'dx\,\delta y;\quad \int_{x''_m}^{x_m-dx} t'dx\,\delta y,$$

permanecen invariables al pasar de la primera curva á la segunda; las dos integrales $\int_{x'_0}^{x'_m} t'dx\,\delta y$, $\int_{x_0''}^{x''_m} t'\,dx\,\delta y$ esperimentan variaciones α, $-\alpha$, iguales y de signo contrario que se compensan; luego si para la curva $afgb$ se verificaba la condicion $\delta n=0$, esta condicion tambien se verificará para la nueva curva $add'b$.

Veamos la alteracion que esperimenta la integral $\int_{x_0}^{x_m} T' dx\,\delta y$, —ó su igual $\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,t'dx\,\delta y$— al pasar de la primera curva á la segunda.

Las tres integrales

$$\int_{x_0+3dx}^{x_0'} f(x)\,t'dx\,\delta y;\quad \int_{x'_m}^{x_0''} f(x)\,t'dx\,\delta y;\quad \int_{x''_m}^{x_m-3dx} f(x)\,t'dx\,\delta y$$

no sufren alteracion alguna, puesto que los arcos ae, fg, hb son invariables, luego para que la condicion δ M subsista debe haber compensacion entre las variaciones de las integrales,

$$\int_{x_0'}^{x'_m} f(x)\,t'dx\,\delta y;\quad \int_{x_0''}^{x''_m} f(x)\,t'dx\,\delta y;$$

pero esta compensacion no puede verificarse, como vamos á demostrar.

En efecto, de las condiciones (h) (α) se deduce para los valores numéricos de las variaciones de la primera integral

$$\delta\int_{x_0'}^{x'_m} f(x)\,t'dx\,\delta y=\int_{x_0'}^{x'_m} f(x)\,t'dx\,\delta(\delta y)<h\int_{x_0'}^{x'_m} t'dx\,\delta(\delta y)=h\alpha;$$

$$-\int_{x_0''}^{x''_m} f(x)t'dx\,\delta y=-\int_{x_0''}^{x''_m} f(x)t'dx\,\delta(\delta y)>h\int_{x_0''}^{x''_m} -t'dx\,\delta(\delta y)=h\alpha$$

por lo tanto δM no se reducirá á cero para la nueva curva *a d d′ b*; resultado absurdo, puesto que la curva *a d d′ b* satisface á la condicion $\delta n = 0$, y se halla infinitamente próxima á la curva del máximo ó del mínimo. De donde se deduce que la relacion $\frac{T'}{t}$ no puede variar con x. (1)

48. Las condiciones del núm. 46 son las mismas á que se hubiera llegado, formando directamente la integral $\int_{x_0}^{x_m}(V - \lambda L)dx$, y hallando el máximo de esta integral; de donde se deduce el método siguiente para hallar los máximos ó mínimos relativos de una integral.

Se multiplica la integral de condicion $\int_{x_0}^{x_m} Ldx$ *por una constante indeterminada* λ; *se agrega al resultado la integral* $\int_{x_0}^{x_m} Vdx$ *cuyo máximo ó mínimo se busca; y se determina por los métodos ordinarios el máximo ó el mínimo de la integral que resulte.*

49. Pasemos á la determinacion de la constante λ.

Representemos por $y = H(x, \lambda)$ la integral de la ecuacion diferencial $T - \lambda t = 0$: sustituyendo en $\int_{x_0}^{x_m} L(x, y, y' \ldots)dx = c$ en vez de y, y', y''.....; $H(x, \lambda)$, $H'(x, \lambda)$, $H''(x, \lambda)$....... tendremos

(1) Journal de Liouville-tomo 7.° nota de Mr. Bertrand.

$$\int_{x_0}^{x_m} \mathrm{L}(x, \mathrm{H}, \mathrm{H}', \mathrm{H}'' \ldots\ldots) dx = c;$$

y efectuando la integracion,—representando por $\mathrm{D}(x, \lambda)$ la integral indefinida,—resultará:

$$\mathrm{D}(x_m, \lambda) - \mathrm{D}(x_0, \lambda) = c.$$

De donde podremos deducir el valor de λ en funcion de las cantidades conocidas x_m, x_0, c.

Máximos y mínimos de la integral

$$\int_{x_0}^{x_m} \mathrm{V}(x, y, y' \ldots z, z' \ldots) dx.$$

50. Generalizando las consideraciones espuestas en los números 8 y 9, podremos desde luego considerar la integral $\int_{x_0}^{x_m} \mathrm{V}(x, y, y' \ldots z, z' \ldots) dx$ como funcion de dos funciones arbitrarias $y = \varphi(x)$, $z = \Psi(x)$: de aqui se deduce que en la serie infinita de valores que recibirá la integral $\mathrm{M} = \int_{x_0}^{x_m} \mathrm{V}\, dx$, cuando $\varphi(x)$, y $\Psi(x)$ varien, habrá uno ó mas máximos ó mínimos correspondientes á ciertas funciones particulares de x.

La determinacion de estos máximos ó mínimos, y de los valores de y y z en x, que á estos máximos ó mínimos corresponden, *constituye el problema general del cálculo de varia-*

ciones de integrales definidas con dos ó mas funciones arbitrarias.

51. Las dos ecuaciones $y=\varphi(x)$, $z=\Psi(x)$, determinan en el espacio una curva de doble curvatura, y en este concepto puede decirse, que la integral $\int_{x_0}^{x_m} Vdx$ depende, ó es funcion, de una curva cuyas proyecciones sobre dos planos coordenados serán $y=\varphi(x)$, $z=\Psi(x)$; ahora bien como siendo arbitraria la curva en el espacio, son asimismo arbitrarias sus proyecciones, y recíprocamente, en último resultado el valor de la integral M depende de dos curvas arbitrarias é independientes entre sí, cuyas ecuaciones son las ya indicadas.

52. Puesto que las dos curvas $y=\varphi(x)$, $z=\Psi(x)$ son arbitrarias y puede variar una de ellas, sin que la otra se altere, es evidente, que podremos considerar sucesivamente la integral M: 1.° como funcion de y, y', y'',.....; 2.° como funcion de z, z', z''.....; y todo cuanto hemos dicho, al ocuparnos de integrales definidas dependientes de una funcion arbitraria, se aplicará aqui á cada una de las funciones $y=\varphi(x)$, $z=\Psi(x)$.

53. El teorema del número 12 subsiste para la integral

$$\int_{x_0}^{x_m} V(x, y, y'.....z, z'.....)dx,$$ considerada como funcion de cada una de las variables y, z; advirtiendo, que, en general, ninguna relacion existe entre las variables y, y', y''..... y las z, z', z''...., y pueden por lo tanto considerarse como independientes de las variaciones de y, y', y''..... las variaciones de la série z, z', z''......

54. Descompongamos la integral M en sus elementos, y apliquemos el principio del núm. 4.: tendremos (empleando notaciones análogas á las del núm. 18.)

$$\delta M=(Y_0\,\delta y_0+Y_0'\,\delta y_0'+Y_0''\,\delta y_0''+\ldots\ldots)dx+(Z_0\,\delta z_0+Z_0'\,\delta z_0'$$
$$+Z_0''\,\delta z_0''+\ldots\ldots)dx$$
$$+(Y_1\,\delta y_1+Y_1'\,\delta y_1'+Y_1''\,\delta y_1''+\ldots\ldots)dx+(Z_1\,\delta z_1+Z_1'\,\delta z_1'$$
$$+Z_1''\,\delta z_1''+\ldots\ldots)dx$$

....

$$+Y_m\,\delta y_m+Y_m'\,\delta y_m'+Y_m''\,\delta y_m''+\ldots\ldots)\,dx+(Z_m\,\delta z_m$$
$$+Z_m'\,\delta z_m'+Z_m''\,\delta z_m''+\ldots\ldots)dx=0;$$

y transformando cada uno de los grupos en (Y), ó en (Z), segun los métodos de los números 20 y siguientes, tendremos para el caso en que los límites son constantes:

$$\delta M=\left[\left(Y'-\frac{dY''}{dx}+\frac{d^2Y'''}{dx^2}\ldots\right)\delta y+\left(Y''-\frac{dY'''}{dx}\ldots\right)\delta y'+Y'''\,\delta y''\ldots\right]_0^m$$

$$+\left[\left(Z'-\frac{dZ''}{dx}+\frac{d^2Z'''}{dx^2}\ldots\right)\delta z+\left(Z''-\frac{dZ'''}{dx}\ldots\right)\delta z'+Z'''\,\delta z''\ldots\right]_0^m$$

$$+\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\left(Y-\frac{dY'}{dx}+\frac{d^2Y''}{dx^2}-\frac{d^3Y'''}{dx^3}\ldots\ldots\right)\delta y\,dx$$

$$+\int_{x_0+3dx}^{x_m-3dx}\left(Z-\frac{dZ'}{dx}+\frac{d^2Z''}{dx^2}-\frac{d^3Z'''}{dx^3}\ldots\ldots\right)\delta z\,dx=0$$

Si los límites son variables, se agregará á los términos anteriores $(V\,\delta x)_0^m$, y se sustituirán las variaciones δy, $\delta y'$, $\delta y''$, δz, $\delta z'$, $\delta z''$ por las espresiones $\delta y-y'\,\delta x$, $\delta y'-y''\,\delta x$, $\delta y''-y'''\,\delta x$, $\delta z-z'\,\delta x$, $\delta z'-z''\,\delta x$, $\delta z''-z'''\,\delta x$.

55. El teorema del núm. 35 subsiste en el caso que nos ocupa, por lo tanto, igualaremos separadamente á cero la parte relativa á los límites, y las dos integrales. De estas últimas, puesto que las proyecciones sobre los planos de las xz, y de las yz, son independientes,—de donde resulta, que las varia-

ciones δz_3, δz_4..... son independientes de δy_3, δy_4....—deduciremos las condiciones

$$Y-\frac{dY'}{dx}+\frac{d^2Y''}{dx^2}-\frac{d^3Y'''}{dx^3}.....=0;$$

$$Z-\frac{dZ'}{dx}+\frac{d^2Z''}{dx^2}-\frac{d^3Z'''}{dx^3}.....=0.$$

Integrando estas ecuaciones diferenciales simultáneas tendremos dos ecuaciones $y=\varphi(x)$, $z=\Psi(x)$, que corresponderán al máximo ó al mínimo buscado, y las condiciones relativas á los límites servirán para determinar las constantes de la integracion.

56. *Caso en que existe una relacion entre las variables y, z.* Supongamos que entre x, y, z, existe la relacion

$$F(x, y, z)=0:$$

las ecuaciones δy, δz, no serán independientes entre sí, puesto que ambas deben satisfacer á la condicion

$$\frac{dF}{dx}\delta x+\frac{dF}{dy}\delta y+\frac{dF}{dz}\delta z=0;$$

resultado á que puede llegarse tambien por consideraciones geométricas. Si los valores de x, y, z, que satisfacen á la condicion del máximo ó del mínimo, han de satisfacer asimismo á la ecuacion $F=0$, es evidente, que la curva del máximo ó del mínimo, $y=\varphi(x)$, $z=\Psi(x)$, deberá hallarse sobre la superficie cuya ecuacion es $F=0$; luego dada una de las proyecciones de esta curva,—por ejemplo, la que tiene por ecuacion $y=\varphi(x)$,—

la curva quedará determinada en el espacio, así como su proyeccion sobre el plano de las y z.

Sea, pues, AEB (fig. 12.) la curva en el espacio, que corresponde al máximo ó al mínimo de la integral, y $a\,b$, a' b' sus proyecciones sobre los planos de las xy, xz: supongamos que los valores de y reciben en el plano de las xy una série de variaciones mn, $m'n'$, m'' n''.... de tal modo, que la curva $a\,m\,b$ se transforme en otra anb infinitamente próxima: la interseccion de la superficie $F=0$ con el cilindro proyectante A anb B determinará una curva AE′B infinitamente próxima á AEB, y la proyeccion a' s b' de esta última fijará las variaciones rs, $r's'$ $r''s''$ de z.

Podremos, pues, considerar cada una de las variaciones δz_3, δz_4,..... como funcion de las variaciones de y y recíprocamente.

57. Prescindamos de la parte relativa á los límites, que como hemos indicado debe reducirse por sí misma á cero, y consideremos tan solo las integrales obtenidas en el núm. 54; tendremos, representando en general por T y por S los coeficientes de δy y δz, y desarrollando las integrales en sus elementos;

$$T_3\,\delta y_3+T_4\,\delta y_4+\ldots\ldots+T_{m-3}\,\delta y_{m-3}+S_3\,\delta z_3+S_4\,\delta z_4 \\ +\ldots\ldots\ldots S_{m-3}\,\delta z_{m-3}=0.$$

Suponiendo que δx es igual á cero, podremos establecer entre δy y δz las relaciones:

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)_3\delta y_3+\left(\frac{dF}{dz}\right)_3\delta z_3=0;\ \left(\frac{dF}{dy}\right)_4\delta y_4+\left(\frac{dF}{dz}\right)_4\delta z_4=0;\ldots\ldots$$

y aplicando el principio del número 5 tendremos, eliminando δz_3, δz_4,......

$$\left[T_3-\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)_3}{\left(\frac{dF}{dz}\right)_3}S_3\right]\delta y_3+\left[T_4-\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)_4}{\left(\frac{dF}{dz}\right)_4}S_4\right]\delta y_4+\ldots\ldots=0$$

condicion que queda satisfecha estableciendo en general para todos los valores de x comprendidos entre x_0+3dx, x_m-3dx, ó entre x_0 y x_m,

$$T\left(\frac{dF}{dz}\right)-S\left(\frac{dF}{dy}\right)=0.$$

Combinando esta ecuacion diferencial con la condicion

$$F(xyz)=0,$$

se determinarán las ecuaciones de la curva correspondiente al máximo ó al mínimo.

58. Si δx no es igual á cero se aplicará un método análogo al que acabamos de esplicar; eliminando $\delta z_3 \ldots\ldots$ por medio de la relacion general

$$\frac{dF}{dx}\delta x+\frac{dF}{dy}\delta y+\frac{dF}{dz}\delta z=0$$

de la ecuacion

$$T_3(\delta y_3-y_3'\delta x_3)+\ldots\ldots+S_3(\delta z_3-z'\delta x_3)+\ldots\ldots=0,$$

tendremos:

$$T_3(\delta y_3=y'_3\delta x_3)+..S_3\left(-\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)_3}{\left(\frac{dF}{dz}\right)_3}\delta x_3-\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)_3}{\left(\frac{dF}{dz}\right)_3}\delta y_3-z_3'\delta x_3\right)$$

$+\ldots=0$; ó bien, ordenando respecto á $\delta y_3, \delta y_4 \ldots \delta x_3, \delta x_4 \ldots,$

$$\left[T_3 - S_3 \frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)_3}{\left(\frac{dF}{dz}\right)_3}\right] \delta y_3 - \left[T_3 y'_3 + \left(\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)_3}{\left(\frac{dF}{dz}\right)_3} + z'_3\right) S_3\right] \delta x_3 + \ldots = 0;$$

é igualando á cero los coeficientes de $\delta y_3, \delta x_3; \delta y_4, \delta x_4 \ldots;$ —puesto que estas variaciones son arbitrarias,—tendremos en general, es decir, para todos los valores de x comprendidos enter x_0 y x_m

$$T - S \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}} = 0; \; T y' + \left(\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}} + z'\right) S = 0.$$

Quitando denominadores, y recordando la relacion $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} z' = -\frac{dF}{dy} y'$, se tendrá la condicion única

$$T\left(\frac{dF}{dz}\right) - S\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0.$$

Esta ecuacion diferencial, combinada con la ecuacion de la superficie $F(x, y, z) = 0$ determinará la de la curva buscada.

59. La condicion relativa á los límites será:

$$\left[\left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \frac{d^2Y'''}{dx^2}\right)(\delta y - y' \delta x)\right.$$

$$\left. + \left(Y'' - \frac{dY'''}{dx}\right)(\delta y' - y'' \delta x) + Y'''(\delta y'' - y''' \delta x)\right]_0^m$$

$$+ \left[\left(Z' - \frac{dZ''}{dx} + \frac{d^2Z''}{dx^2}\right)(\delta z - z' \delta x)\right.$$

$$+\left(Z''-\frac{dZ'''}{dx}\right)\left(\delta z'-z''\delta x\right)+Z'''\left(\delta z''-z'''\delta x\right)\Bigg]_0^m=0,$$

y servirá para determinar las constantes de la integracion.

Si los límites fuesen variables se agregaria el término $\Big[\mathrm{V}\,\delta x\Big]_0^m$.

Ejemplos del cálculo de variaciones.

Primer caso. La integral solo contiene una funcion arbitraria, y los límites x_0, x_m son constantes.

Determinar en el plano de las xy una curva, que pase por los puntos $(x_0\,y_0)$ $(x_1\,y_1)$, y tal, que girando alrededor del eje de las x engendre la superficie de revolucion de área mínima.

La integral cuyo mínimo debemos determinar será:

$$\mathrm{M}=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\;dx.$$

La fórmula general aplicable á este caso es, (núm. 27)

$$\Big[\mathrm{Y}'\,\delta y\Big]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(\mathrm{Y}-\frac{d\mathrm{Y}'}{dx}\right)\delta y\,dx=0.$$

De donde resulta para la ecuacion diferencial de la curva buscada $\mathrm{Y}-\dfrac{d\mathrm{Y}'}{dx}=0$, y para la determinacion de las constantes $\Big[\mathrm{Y}\,\delta y\Big]_{x_0}^{x_1}=0.$

Tendremos para Y, Y', $\frac{dY'}{dx}$ los valores siguientes:

$$Y=\sqrt{1+y'^2}\,;\ Y'=\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\,;\ \frac{dY'}{dx}=\frac{yy''+(1+y'^2)y'^2}{(1+y'^2)^{3/2}}\,;$$

sustituyendo en $Y-\frac{dY'}{dx}=0$, resultará:

$$\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy''+(1+y'^2)y'^2}{(1+y'^2)^{3/2}}=0\,;$$

ó bien $(1+y'^2)^2=yy''+(1+y'^2)y'^2$; y finalmente

$$1+y'^2=yy''.$$

Para integrar esta ecuacion cambiaremos de variables, sustituyendo y á la variable independiente x (Cournot, 2.ª edicion, tomo II núm. 451): poniendo por y', é, y''; $\frac{1}{x'}$, $-\frac{x''}{x'^3}$ resultará,

$$1+\frac{1}{x'^2}=-y\frac{x''}{x'^3}\,;\ (x'^2+1)x'=-yx''\,;\frac{dy}{y}=-\frac{dx'}{x'(x'^2+1)}$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx'}{x'}+\frac{x'dx'}{x'^2+1}\,;$$

integrando, $x'=\frac{a}{\sqrt{y^2-a^2}}$; ó bien, $dx=\frac{ady}{\sqrt{y^2-a^2}}$; é integrando segunda vez, $x=a\log.\left(y+\sqrt{y^2-a^2}\right)+b$.

La condicion $Y_1\,\delta y_1 - Y_0\,\delta y_0 = 0$ queda satisfecha por sí misma puesto que y_1 é y_0 son constantes.

Se determinarán a y b por las dos condiciones

$x_0 = a\log.\left(y_0 + \sqrt{y_0^2 - a^2}\right) + b;\ x_1 = a\log.\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 - a^2}\right) + b.$

2.° *Caso. La integral solo contiene una funcion arbitraria, y uno de los límites x_0, x_m, ó los dos, son variables.*

Determinar la mas corta distancia de dos círculos dados por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$. (fig. 13.)

La integral cuyo máximo debemos buscar será:

$$\int_{x_0}^{x_m} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Las fórmulas aplicables á este caso son: (núm. 37.)

para la ecuacion de la curva $Y - \frac{dY'}{dx} = 0$;

y para la determinacion de las constantes $[V\,\delta x + Y'(\delta y - y'\,\delta x)]_0^m$: las relaciones entre los límites segun las condiciones del problema (núm. 37),

$$x_0^2 + y_0^2 = 1;\ (x_m - 4)^2 + y_m^2 = 4;$$

los valores de δy_0, δy_m, — $\delta y_0 = -\frac{x_0}{y_0}\,\delta x_0$; $\delta y_m = -\frac{x_m - 4}{y_m}\,\delta x_m$

y los de Y, Y', $\frac{dY'}{dx}$,

$$Y = 0;\ Y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}};\ \frac{dY'}{dx} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

Sustituyendo, pues, en $Y - \frac{dY'}{dx} = 0$ tendremos,

$$y'' = 0.$$

é integrando $y' = a$; $y = ax + b$.

Luego la línea buscada es una línea recta.

La condicion relativa á los límites se reduce,—sustituyendo los valores de V, é Y,—á

$$\left[\sqrt{1+y'^2}\,\delta x + \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(\delta y - y'\,\delta x)\right]_0^m = 0,$$

ó bien $[\delta x + y'\,\delta y]_0^m = 0$; de donde resulta,

$$\delta x_m + y'_m\,\delta y_m - \delta x_0 - y_0'\,\delta y_0 = 0,$$

y sustituyendo los valores de δy_0, δy_m, y_0', y'_m tendremos

$\delta x_m \left[1 - \frac{x_m - 4}{y_m} a\right] - \delta x_0 \left[1 - \frac{x_0}{y_0} a\right] = 0$. Igualando á cero los coeficientes de δx_m, δx_0, las cuatro ecuaciones

$$y_0^2 + x_0^2 = 1\quad y_0 - x_0 a = 0;$$
$$y^2_m + (x_m - 4)^2 = 4;\quad y_m - (x_m - 4)\,a = 0;$$

darán los valores,

$$x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2}};\quad y_0 = \pm \frac{a}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$x_m = 4 \pm \frac{2}{\sqrt{1+a^2}};\quad y_m = \pm \frac{4a}{\sqrt{1+a^2}};$$

:

y sustituyendo x_0, y_0, x_m, y_m en la ecuacion de la línea $y=ax+b$, de las dos ecuaciones de condicion.

$$\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+b;$$

$$\pm\frac{4a}{\sqrt{1+a^2}}=4a\pm\frac{4a}{\sqrt{1+a}}+b;$$

se deducirá $b=0$; $a=0$. La ecuacion de la línea que mide la mas corta distancia será, pues, $y=0$: como debia resultar puesto que el eje de las x es la línea de los centros.

Poniendo en la integral $\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ por x_0, x_m, é y' los valores 1, 2 (tomando el signo — del radical), y, 0 se reducirá á $\int_1^2 dx=1$: luego el mínimo de M es

$$M=1.$$

3.^{er} *Caso. Máximos y mínimos relativos.*

Hallar la ecuacion de la curva AB (fig. 13.) *que da un valor máximo ó mínimo para la integral* $\int_{x_0}^{x_m} y\,dx$, *satisfaciendo á la condicion* $\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{1+y'^2}\,dx=S$: *ó lo que es igual, determinar, entre todas las curvas de igual longitud* S *que pasan por dos puntos* (x_0, y_0) (x_m, y_m), *la que hace un máximo ó un minino al área comprendida entre dos ordenadas correspon-*

dientes á las abscisas x_0, x_m, el eje de las x, y dicha curva AB.

Deberemos (núm. 48.) multiplicar la segunda integral por la constante λ, y agregar al resultado la primera integral; tendremos, pues,

$$\int_{x_0}^{x_m} (y+\lambda\sqrt{1+y'^2})dx,$$

y aplicando las fórmulas generales del núm. 27.

$\mathrm{Y}-\frac{d\mathrm{Y}'}{dx}=0$; $\Big[\mathrm{Y}'\,\delta y\Big]_0^m=0$: resultará, despues de sustituirse en vez de Y, Y', $\frac{d\mathrm{Y}'}{dx}$ sus valores; $\mathrm{Y}=1$; $\mathrm{Y}'=\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}$;

$\frac{d\mathrm{Y}'}{dx}=\frac{\lambda y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$;

$$1-\frac{\lambda y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=0;\quad \frac{y_m'}{\sqrt{1+y_m'^2}}\delta y_m-\frac{y_0'}{\sqrt{1+y_0'^2}}\delta y_0=0.$$

La 1.ª de estas dos últimas ecuaciones puede ponerse bajo la forma

$$dx=\frac{\lambda\,dy'}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}};$$

de donde resulte para la primera integral

$$x-a=\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Despejando y' é integrando segunda vez, resultará para la ecuacion de la curva, $y'=\frac{x-a}{\sqrt{\lambda^2-(x-a)^2}}$; $y-b=-\sqrt{\lambda^2-(x-a)^2}$

y finalmente

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2.$$

Asi pues, la curva buscada es un arco de círculo cuyo radio es λ y cuyo centro es el punto (a, b).

La condicion relativa á los límites se satisface por sí misma puesto que las variaciones δy_0, δy_m son iguales á cero.

Las constantes a, b, λ se determinan por las tres condiciones

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=\lambda^2$$

$$(x_m-a)^2+(y_m-b)^2=\lambda^2$$

$$\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{1+\frac{(x-a)^2}{\lambda^2-(x-a)^2}}\,dx=s$$

4.° *Caso. La integral contiene dos funciones arbitrarias de x, y los límites x_0, x_m son constantes: no existe ninguna relacion entre y y z.*

Hallar la mas corta distancia entre dos puntos (x_0, y_0, z_0) (x_m, y_m, z_m).

La integral cuyo máximo se busca será:

$$\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx.$$

Las fórmulas aplicables á este caso son: (núm. 55).

para las ecuaciones de la curva $Y-\frac{dY'}{dx}=0;\ Z-\frac{dZ'}{dx}=0;$

para las condiciones relativas á los límites $\left[Y'\,\delta y+Z'\,\delta z\right]_0^m=0.$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores los valores

$$Y=0;\ Y'=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}};\ \frac{dY'}{dx}=\frac{y''+z'^2\,y''-y'\,z'\,z''}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}};$$

$$Z=0;\ Z'=\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}};\ \frac{dZ'}{dx}=\frac{z''+y'^2\,z''-y'\,z'\,y''}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}};$$

tendremos para la curva las ecuaciones simultáneas

$$y''+z'^2\,y''-y'z'z''=0;\ z''+y'^2\,z''-y'z'y''=0$$

ó bien $\quad z''=0;\ y''=0$

que integradas darán $\ y=ax+b;\ z=cx+d.$

La espresion $\left[Y'\,\delta y+Z'\,\delta z\right]_0^m$ será evidentemente igual á cero, puesto que y_0, x_0, y_m, x_m son cantidades constantes.

Las constantes a, b, c, d, se determinarán por las condiciones.

$$y_0=ax_0+b;\ z_0=cx_0+d$$
$$y_m=ax_m+b;\ z_m=cx_m+d$$

5.° *Caso. La integral contiene dos funciones arbitrarias de x; los límites son constantes, y existe una relacion entre y y z.*

Hallar la curva que mide la mas corta distancia entre dos puntos A, C, (fig. 15.) *situados en una superficie cilíndrica.*

Sean $[x=0, y=1, z=0]$ $[x=1, y=0, x=h]$ las coordenadas de los dos puntos, y $x^2+y^2=1$ la ecuacion de la superficie cilíndrica.

Las fórmulas aplicables á este caso son: (núm. 57.)

$$\mathrm{T}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right)-\mathrm{S}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)=0;\left[\mathrm{Y}'\,\delta y+\mathrm{Z}'\,\delta z\right]_0^m=0;$$

siendo $\mathrm{T}=\left(\mathrm{Y}-\frac{d\mathrm{Y}'}{dx}\right)dx;\ \mathrm{S}=\left(\mathrm{Z}-\frac{d\mathrm{Z}'}{dx}\right)dx.$

La integral cuyo mínimo buscamos será:

$$\int_0^1 \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

y sustituyendo en las fórmulas anteriores los valores

$$\mathrm{Y}=0;\ \mathrm{Y}'=\frac{y'}{\sqrt{1+y''^2+z'^2}};\ \frac{d\mathrm{Y}'}{dx}=\frac{y''+z'^2y''-y'z'z''}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}};$$

$$\mathrm{Z}=0;\ \mathrm{Z}'=-\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}};\ \frac{d\mathrm{Z}'}{dx}=\frac{z''+y'^2z''-z'y'y''}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}$$

$$T = -\frac{y'' + z'^2 y'' - y'z'z''}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}dx;\ S = -\frac{z'' + y'^2 z'' - y'z'y''}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}dx;$$

$$\frac{dF}{dz} = 0;\ \frac{dF}{dy} = 2y$$

$$\delta y_0 = 0;\ \delta y_m = 0;\ \delta z_0 = 0;\ \delta z_m = 0;$$

tendremos para ecuacion diferencial de la curva

$$(z'' + y'^2 z'' - y'z'y'')2y = 0;\ \text{ó bien}\ z''(1+y'^2) - y'z'y'' = 0;$$

suprimiendo el factor en y, que no corresponde evidentemente á la solucion buscada.

Los valores de δy_0, δy_m, $\delta z_0'$, δz_m satisfacen á la condicion $[Y'\delta y + Z'\delta z]_0^m = 0$, puesto que reducen el primer miembro á cero.

Para integrar la ecuacion $z''(1+y'^2) - y'z'y'' = 0$, sustituiremos en ella por y', é y'', los valores $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'' = -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ deducidos de la ecuacion de la superficie $x^2+y^2=1$: resultará, pues, para la ecuacion diferencial de la proyeccion sobre el plano de las xz: $\frac{z''}{1-x^2} - \frac{xz'}{(1-x^2)^2} = 0$, ó bien $\frac{z''}{z'} = \frac{x}{1-x^2}$:

de donde se deduce,

$$\frac{dz'}{z'} = \frac{xdx}{1-x^2};$$

é integrando, $\log z' = -\log\sqrt{1-x^2} + \log a$; $z' = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$;

ó bien $$dz=\frac{adx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integrando segunda vez tendremos para la ecuacion de la proyeccion sobre el plano de las $z\,x$

$$z=a\ arc\ [sen=x]+b.$$

Las constantes a, b se determinarán por las condiciones

$$0=a\ 0+b \qquad\qquad b=0$$

ó bien

$$h=a\frac{\Pi}{2}+b \qquad\qquad a=h:\frac{\Pi}{2}$$

y la ecuacion buscada será:

$$z=\frac{h}{\frac{\Pi}{2}}arc\ (sen=x).$$

La ecuacion anterior es, como debia ser, la ecuacion de una sinusoide, proyeccion de la hélice A C en el plano de las $x\ z$.

6.° *Caso. La integral contiene dos funciones arbitrarias de x: los limites son variables: existe una relacion entre y, z.*

Hallar la mas corta distancia entre dos hélices situados sobre un cilindro $[y^2+x^2=1]$ y dadas por sus ecuaciones.

Sean estas ecuaciones:

para la primera $z=m\,arc\ (sen=x)$; $x^2+y^2=1$;
para la segunda $z=m\ arc\ (sen=x)+p$; $x^2+y^2=1$.

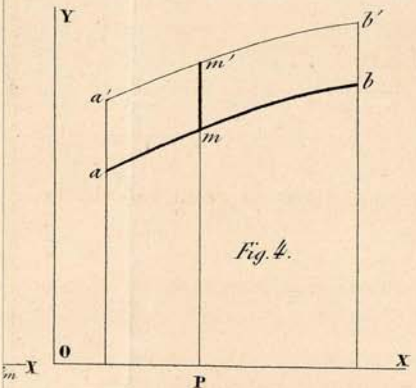


Fig. 4.

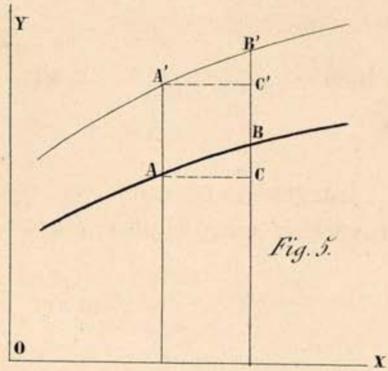


Fig. 5.

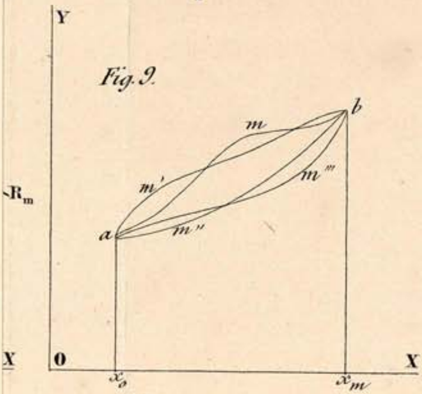


Fig. 9.

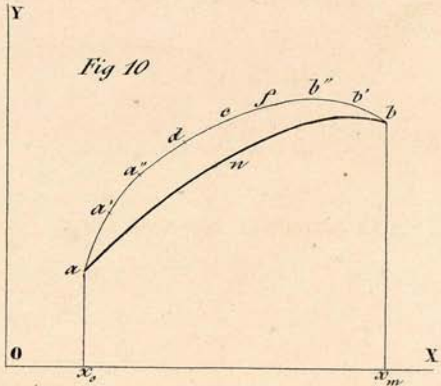


Fig 10

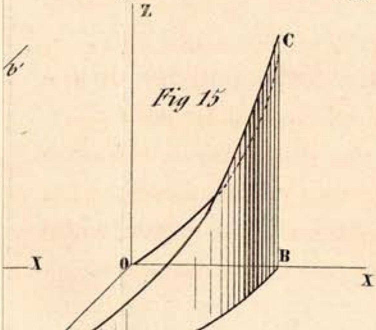


Fig 15

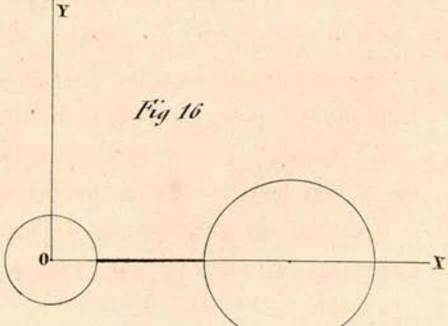
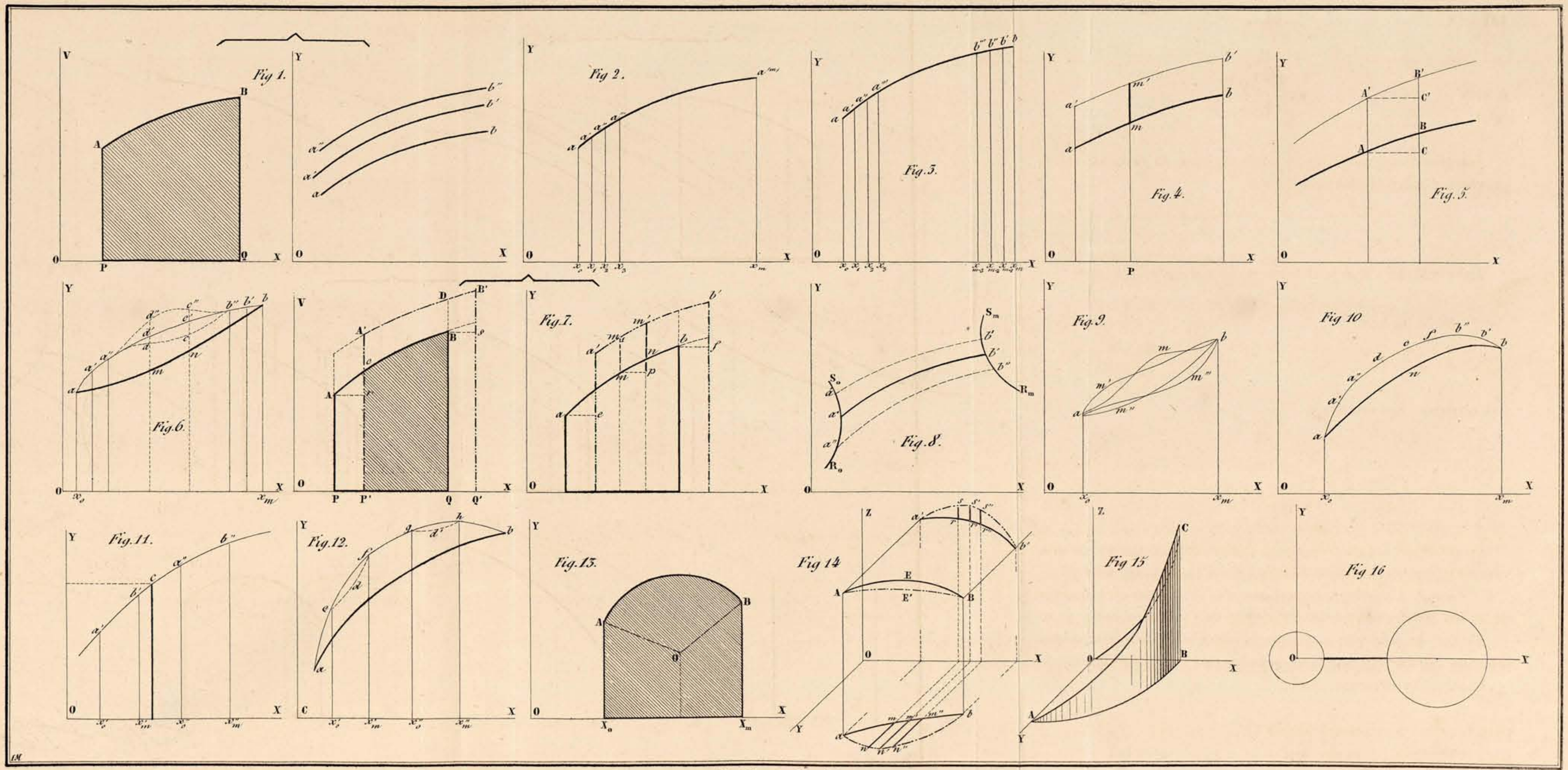


Fig 16



Lit J. Donon. Madrid.

La integral cuyo mínimo buscamos será $\int_{x_0}^{x_m} \sqrt{1+y'^2+x'^2}\, dx.$

Las ecuaciones de la curva, que mide la mas corta distancia, serán como en el caso anterior

$$z = a \; arc\,(sen = x) + b;\; x^2 + y^2 = 1$$

Las condiciones relativas á los límites son (núm. 59)

$$[V\,\delta x]_0^m + [Y'\,(\delta y - y'\,\delta x) + Z'\,(\delta z - z'\,\delta x)]_0^m = 0.$$

Sustituyendo los valores de Y' y de Z', y simplificando resulta

$$\Big[[1+y'^2+z'^2]\,\delta x + y'\,(\delta y - y'\,\delta x) + z'\,(\delta z - z'\,\delta x)\Big]_0^m = 0;$$

ó bien desarrollando.

$$\delta x_m + y'_m\,\delta y_m + z_m'\,\delta z_m - \delta x_0 - y_0'\,\delta y_0 - z_0'\,\delta z_0 = 0$$

Sustituyendo en esta espresion los valores de δy_m, δz_m, δy_0, δz_0, en funcion de δx_m, δx_0 deducidos de las ecuaciones de las hélices dadas, y los valores de y'_m, z'_m, y_0', z_0' deducidos de las ecuaciones de la curva que mide la mínima distancia, tendremos:

$$\delta x_m\left[1 + \frac{x_m^2}{1-x_m^2} + \frac{am}{1-x_m^2}\right] - \delta x_0\left[1 + \frac{x_0^2}{1-x_0^2} + \frac{am}{1-x_1^2}\right] = 0:$$

igualando á cero los coeficientes de δx_m y δx_o llegaremos á la condicion única

$$1+am=0;$$

de donde se deduce $a=-\frac{1}{m}$.

La constante b queda indeterminada como debia ser, puesto que las hélices dadas son paralelas, y una tercera hélice que las corte en ángulo recto, mide la mas corta distancia entre las primeras sea cual fuere su posicion.