Tendremos $d = 7 - 3 = 4$; y si suponemos $p = \frac{1}{5}$; tendremos $l = \frac{4}{\frac{1}{5}} = 4 \times 5 = 20$. Tomando esta magnitud en la escala y haciendo centro en *a*, trazaremos con ella como rádio un arco, que en general cortará á la horizontal de cota 3 en dos puntos *b* y *b'*. Las rectas acotadas *a b*, *a b'*, serán las que resuelven el problema.

Si el punto dado es el (a. 9,4) (fig. 48), que no tiene cota entera, se traza una horizontal 6,4 de manera que dé un número entero para la altura del punto dado sobre el plano horizontal en que se ha de ejecutar la construccion; y se resuelve el problema del mismo modo que en el caso anterior, sirviéndonos de la horizontal que hemos determinado.

Este problema puede tener dos soluciones, una ó ninguna, segun la relacion de magnitud que existe entre la pendiente *p* de la recta que se quiere trazar y la P que corresponde al plano dado.

En efecto, la pendiente de una recta situada en un plano puede variar entre los límites, cero, que es la de la horizontal que pasa por el punto dado y P, que es la de la línea de máxima pendiente del plano.

Por consiguiente, si se tiene $p = 0$, la recta pedida será la horizontal *m* (fig. 48) del plano que pasa por el punto dado.

Si se tiene $p < P$, el problema tendrá las dos soluciones *a n*, *a o*, del problema que hemos resuelto, y que es el caso mas general.

Cuando es $p = P$, el problema tiene una sola solucion, que será la línea *a r* de máxima pendiente del plano. La construccion dará la proyeccion de la recta, en una direccion perpendicular á las horizontales, ó lo que es lo mismo, el arco trazado para resolver el problema será tangente á la horizontal *n o*.

No habrá solucion alguna si se tiene $p > P$, y el arco *s t* trazado para resolver el problema no cortará á dicha horizontal.

61. *Por una recta dada* A B (fig. 49) *hacer pasar un plano de pendiente dada* $\frac{1}{n}$.

Por el punto inferior A se hace pasar un plano horizontal P, y desde un punto B de la recta se traza el cono cuyas generatrices tienen la pendiente dada (26). Se tira desde *a* la tangente A *t* á la base del cono y la generatriz B *t* que corresponde al punto de tangencia *t*. El plano de las rectas B A y *a t* es el plano pedido.

En efecto, siendo *bt* perpendicular á la horizontal *at* (Geometría Teor. 41. Recíproco), la recta B *t* tambien lo será (Geometría Teor. 120), y por tanto será la línea de máxima pendiente del plano B A *t*, el cual tendrá la pendiente $\frac{1}{n}$.

Si la recta dada es *ab* (fig. 50) y la pendiente del plano que se pide es $\frac{1}{2}$, se tomará en la escala la distancia espresada por la fraccion $\frac{13-5}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{\frac{1}{2}}=16$ (25, fórmula [4]) y haciendo centro en *b*, punto que tiene la cota 13, se trazará una circunferencia en el plano de cota 5, en el cual se hacen las construcciones. Esta circunferencia será la base del cono cuyas generatrices tienen la pendiente $\frac{1}{2}$. Se tira la tangente *a t* y la normal *b t*, la cual será la escala de pendiente del plano que se pide, determinada por los puntos (b. 13) (t. 5).

Cuando se tiene, como en el problema que acabamos de resolver, $b\ t < a\ b$ lo que dá para el plano mayor pendiente P que la *p* que tiene la recta, el problema admite dos soluciones, correspondientes á las dos tangentes que pueden tirarse por *a* á la circunferencia trazada desde *b* como centro. Este caso es el mas general.

Cuando resulta $b\ t = b\ a$, lo que da $P = p$, los puntos *a* y *t* (fig. 51) se confunden en uno solo, y por este punto solo puede tirarse la tangente $t'' t'$; hay pues una solucion y el plano hallado está determinado por las rectas $a\ b$ y $t'' t'$. La escala de pendiente del plano es la misma $ab$ de la recta dada.

Si resultase para $l$ una magnitud $b\ t'' > a\ b$, lo que daria $P < p$, no se podria tirar desde $a$ tangente alguna á la circunferencia trazada con el rádio $b\ t''$, y el problema no tendria, por lo tanto, solucion alguna.

Puede este problema resolverse de otro modo.

Se proyectan los puntos A y B (fig. 52) sobre un plano horizontal P, se trazan las bases de los conos, que teniendo sus vértices respectivos en A y B, tienen generatrices cuya pendiente es la que se asigna para el plano (26). Se tira despues la tangente $t\ t'$ comun á estas bases y las normales $a\ t$, $b\ t'$. Tirando tambien las generatrices A $t$, B $t'$, que corresponden á los puntos de tangencia $t$ y $t'$, las rectas AB, A $t$, $t\ t'$, B $t'$, están en un mismo plano que reune las condiciones pedidas.

En efecto, siendo A $a$, B $b$ paralelas (Geom. Teor. 122) y tambien las $a\ t$, $b\ t'$, (Geom, Teor. 6), los planos A $a\ t$, B $b\ t'$ serán tambien paralelos (Geom. Teor. 130). Siendo además los ángulos A $t\ a$, B $t'\ b$ iguales por construccion, estando situados en planos paralelos, como acabamos de demostrar, y habiendo probado ya que los lados $a\ t$, y $b\ t'$ de estos ángulos son paralelos, se verificará que los A $t$ y B $t'$ tambien lo serán; porque si no lo fuesen, tirando por $t$ una paralela á B $t'$, el ángulo que formase con $t\ a$ seria igual al B $t'\ b$ y además estaria en el plano A $a\ t$ (Geom. Teor. 130); pero como por construccion el ángulo A $t\ a$ tambien es igual al B $t'\ b$, tendriamos en el punto $t$ del plano A $a\ t$ dos rectas que formarian ángulos iguales á un mismo lado de otra recta $a\ t$ del plano en que se encuentran, y tambien al mismo lado de la perpendicular que en el mismo plano puede levantarse por $t$ á la $a\ t$, lo que no puede ser.

Siendo pues A $t$ y B $t'$ paralelas, determinarán un plano en el que estarán las A B y $t\ t'$ (Geom. 53).

Para resolver este problema, siendo $a\ b$ (fig. 53) la proyeccion acotada de la recta dada, $\frac{1}{2}$ la pendiente que ha de tener el plano, y suponiendo que hacemos las construcciones en el plano de comparacion, haremos centro en $b$ con un rádio $R = \frac{13}{\frac{1}{2}} = 26$ (26) y trazaremos una circunferencia; con el radio $r = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$, trazaremos otra desde $a$, y tiraremos la tengente $t t'$ comun á estas circunferencias, y las normales $a t$, $b t'$. Se hallará la escala de pendiente de una de ellas (30), la cual será la del plano que se pide.

Tambien se puede resolver este problema, aplicando la recta á un plano horizontal. Sea $m$ (fig. 54) el ángulo que ha de formar el plano que se pide con el horizontal. Aplicando la recta dada al plano horizontal de cota 3, para lo cual servirá de eje la horizontal (3′ — 3′) del plano proyectante de la recta dada M N, se construirá en un punto cualquiera $a$ de esta horizontal un ángulo igual al dado $m$, y se prolongará el lado que resulte hasta su encuentro en $b$ con M N. Desde $b$ se bajará la perpendicular $b c$ á la horizontal (3′ — 3′), y haciendo centro en $c$, se trazará con el radio $c a$ una circunferencia, la cual será la base del cono que engendraria en el espacio el triángulo $a b c$, girando alrededor de la vertical aplicada en $b c$, y cuyas generatrices tendrian la inclinacion dada $m$.

Tirando desde $r$ la tangente $r d$, la perpendicular $c e$ bajada á ella desde $c$, será la escala del plano que se pide, en la cual $e$ tendrá la cota 3, y $c$ la 6,3 que corresponde al punto $b$. (1) A

## INTERSECCIONES.

62. *Dado un plano* P (fig. 55) *determinar su traza ó su interseccion con el plano horizontal de proyeccion.*

Se halla la *traza* $p$ de la línea de máxima pendiente del plano dado (38), y la $m n$, perpendicular á ella por este punto, será la horizontal de cota cero, ó la traza que se pide.

63. *Dado un plano por su escala de pendiente* a b (fig. 36),

(1) La verdadera posicion del plano es e′c′

*hallar su interseccion con otro plano horizontal de cota dada* 5,3.

Como la interseccion que se busca ha de estar en el plano horizontal, todos sus puntos tendrán la cota 5,3 de este plano; y como tambien ha de hallarse en el plano dado, será la horizontal de cota 5,3 de este último.

64. *Hallar la interseccion de dos rectas* A, B, (fig. 40) *situadas en un plano dado* P.

La proyeccion del punto que se busca será la interseccion de las proyecciones de las rectas (36). La cota que corresponde al punto que buscamos se halla en la escala del plano (49).

65. *Dada la interseccion* a b (fig. 56) *de dos planos* P, P′, *hallar la de estos con un tercer plano* Q.

Sean (3 — 3) (7 — 7) las horizontales de cota 3 y 7 del plano P, y (3′ — 3′) (7′ — 7′) las de cota 3 y 7 del P′. El plano Q cortará á las horizontales de cota 7 en dos puntos de la misma cota, y la horizontal *m* que los une será la interseccion del plano Q con el horizontal de cota 7.

De la misma manera la horizontal *n* será la interseccion de Q con el plano horizontal de cota 3.

Estas rectas *m*, *n*, serán paralelas (Geom. Teor. 128) como lo serán tambien sus proyecciones sobre un plano horizontal cualquiera. (Geom. Teor. 133).

Además la recta (7 — 3) está en el plano P, y tambien en el Q, pues tiene en ambos los puntos 7 y 3. Por una razon análoga, la recta (7′ — 3′) está en los planos P′ y Q. Luego el punto Y en que estas rectas se cortan, estando en ambas, estará en los tres planos.

Para resolver este problema, siendo la recta *a* (fig. 57) la interseccion de los planos P y P′, se tirarán las horizontales paralelas (3 — 3′) (7 — 7′), y se unirá el punto 3 con el 7, y el 3′ con 7′. La interseccion *y* de las rectas (3 — 7) y (3′ — 7′) será el punto que se busca, el cual, si la construccion está bien hecha, estará tambien en la interseccion dada *a* de los planos P y P′. La cota que corresponde á *y* se hallará fácilmente (23 ó 49).

66. *Hallar la interseccion de dos planos dados.*

Prolongando las horizontales de una misma cota cualquiera 8, (figs. 58 y 59) en los planos dados, el punto (m. 8′) en que se cortan, estará en ambos planos (50). Del mismo modo, el punto (n. 5') tambien lo estará. Luego la recta *m n* acotada, será la interseccion de los dos planos.

Esta interseccion es una *arista entrante* en la fig. 58 y una *arista saliente* en la fig. 59.

Si las horizontales de igual cota se han de encontrar fuera de los límites del dibujo, se hallará la interseccion *m* (fig. 60), de los planos dados P y P' con un tercer plano Q (65), y la *n* de los dos primeros con otro cualquiera Q'. Los puntos *m* y *n* determinan la interseccion que se pide.

En efecto, el punto *m* se halla en los planos P, P' y Q; luego es un punto comun á los *P* y *P'*.

El punto *n*, encontrándose en P, P' y Q' se halla tambien en P y P'. Luego *m n* es la interseccion de estos planos.

Para efectuar la construccion siendo P y P' (fig. 61) los planos dados, se determinarán *m* y *n* (65). La recta acotada que uniera los puntos *m* y *n*, seria la que se trataba de hallar.

67. *Caso particular.*

Lema.—*Si dos planos tienen sus horizontales paralelas, la interseccion de estos planos es paralela á los horizontales.*

En efecto, tirando un plano perpendicular á una de las horizontales que lo será á las demás (Geom. Teor. 122 Recíp.) los planos dados serán perpendiculares al que acabamos de tirar (Geom. Teor. 141) y por tanto su interseccion tambien lo será (Geom. Teor. 143). Habiendo probado que esta interseccion es perpendicular al plano tirado perpendicularmente á las horizontales del plano, será paralela á estas horizontales (Geom. Teor. 122).

*Corolario.*—La interseccion es horizontal, puesto que es paralela á las horizontales de los planos dados.

Problema.—*Dado un plano cuyas horizontales son paralelas á las de otro tambien dado, hallar la interseccion de los planos.*

El plano tirado por P (fig. 62) perpendicular á las horizontales de los dados, lo será á la P *o* de cota cero en uno de los planos y por tanto la P *o*, perpendicular al plano, lo será á P Q. Esta recta es la traza del plano (46) el cual será vertical por ser perpendicular á las horizontales.

Para obtener la proyeccion y la cota de la interseccion, se aplica este plano al horizontal y se prolongan sus intersecciones M y N, (figs. 62 y 63) con cada uno de los dados hasta su encuentro en *t*. Tirando por este punto una paralela á las horizontales tendremos la proyeccion de la interseccion. La cota de esta recta es la del punto *t*, que se aprecia en la escala de las alturas ó en la de pendiente de uno de los planos dados.

68. *Hallar la interseccion de un plano* P (fig. 64) *y una recta* r.

Se trazan dos horizontales del plano que tengan cota dada, 3 y 8, y desde los puntos de igual cota de la recta *r*, se tiran en una direccion cualquiera dos paralelas, que cortarán á las horizontales del plano en los puntos 3′, 8′. Estas paralelas son las horizontales de un plano Q, que pasa por la recta dada (57), y la (3′ — 8′) será la interseccion de este plano con el dado (66).

La interseccion *m*, de (3′ — 8′) con la recta dada (37) será el punto que se busca.

En efecto, *m* se halla en la recta *r* y en el plano P.

69. *Hallar la interseccion de dos rectas situadas en un plano vertical.*

Por los puntos 3 y 7 (fig. 65) se tiran dos paralelas, que serán las horizontales de un plano, que pasa por una de las rectas. El punto que se busca estará en este plano.

Tambien estará en el plano de las horizontales de cota 3 y 7, tiradas por 3′ y 7′, que determinarán otro plano que pasa por la segunda recta.

Luego el punto que tratamos de hallar estará en la interseccion (3″ — 7″) de estos planos (66), y será por lo tanto el punto (m. 5,7) en que esta recta corta á la proyeccion comun de las dos rectas dadas.

70. *Por un punto dado hacer pasar un plano paralelo á una recta dada.*

Se tira por el punto una paralela á la recta dada.

Entre todos los planos que pasan por esta paralela (57), hay uno que contiene á la recta dada; todos los demás le son paralelos.

71. *Por un punto dado hacer pasar un plano paralelo á otro tambien dado.*

Se tira por el punto una paralela á la escala de pendiente del plano (35), y esta recta será la escala de pendiente del plano que se pide.

72. *Por un punto dado hacer pasar una recta paralela á un plano tambien dado.*

Hágase pasar por el punto un plano paralelo al dado (71). Toda recta, que se haga pasar por el punto dado en este plano, será paralela al primero.

73. *Dadas dos rectas* a, b, (fig. 66) *tirar por ellas dos planos paralelos.*

Desde un punto (*m.* 1) de la recta *a* se tira la *a'* paralela á *b*, y desde el (n. 1) de igual cota en *b*, la *b'* paralela á *a* (35). El plano P que determinan las *a* y *a'* (59) será paralelo al P' que determinan las *b* y *b'* (Geom. Teor. 130).

## PERPENDICULARIDAD DE LAS RECTAS Y DE LOS PLANOS.

74. *Desde un punto* (a. 3) (fig. 67) *situado fuera de una recta acotada* c b, *tirar una perpendicular á esta recta.*

Se une la proyeccion *a* del punto dado con las *b* y *c* de los extremos de la recta. Se hallan despues las magnitudes *c b'*, *b''a*, *b'''c* (22) de los lados del triángulo que forman las rectas proyectadas en *c b*, *b a*, *a c*, y se construye este triángulo (Geom. Prob. 10), tomando por base la *c b'* aplicacion de la recta dada. Desde el vértice *a'* que resulta de la construccion, se tira la *a' d* perpendicular á *c b'*, y por *d* la perpendicular *d e* á la proyeccion *c b* de la recta dada. El pié *e* de esta perpendicular, cuya cota se halla fácilmente (31), determinará con el punto dado la perpendicular que se pide.

Tambien puede resolverse este problema, uniendo la proyeccion *c* (fig. 68) del punto dado con la del que tiene igual cota en la recta, y haciendo girar á esta alrededor de la horizontal (3 — 3) hallada.

Un punto de la recta, tal como el proyectado en *b*, se moverá entonces en el plano vertical cuya traza es (3' — 8), perpendicular al eje de rotacion. Cuando la recta que se mueve haya llegado al plano horizontal de cota 3, en que ejecutamos las construcciones, estará representada en el plano en su verdadera magnitud.

Esta magnitud se obtiene hallando la (3' — 8'), de la recta, proyectada en (3' — 8), y llevándola desde 3', con el rádio (3' — 8') hasta encontrar á la prolongacion de (3' — 8) en el punto 8''.

Uniendo ahora los puntos 3 y 8'', la recta (3 — 8'') será la aplicacion de la recta dada al plano horizontal de cota 3.

Tirando desde $c$ una perpendicular $c\,h$ á esta recta y desde $h$ la $h\,a$ paralela á (3′ — 8″), el punto $a$ será la proyeccion del pié de la perpendicular que buscamos, cuya cota se hallará en la escala de la recta dada.

Este punto hallado, determina con el dado la perpendicular que se pide.

75. *Hallar la distancia de un punto á una recta.*

Esta distancia es la perpendicular tirada desde el punto á la recta. Tirando esta perpendicular (74), se halla su verdadera magnitud, que será la distancia que se pide.

En las (figs. 67 y 68) la perpendicular á que nos referimos está en su verdadera magnitud en el plano horizontal de cota 3.

76. *Desde un punto dado* (a. 3) (fig. 69) *de una recta situada en un plano vertical, levantar una perpendicular á esta, en el mismo plano.*

Se aplica la recta al plano horizontal de proyeccion, y en el punto 3′ de esta recta (0 — 5′) aplicada, se tira una recta $c\,b$, que le sea perpendicular, la cual cortará á la proyeccion de la recta dada en un punto $b$, cuya cota será cero.

Los puntos (a. 3″) (b. 0″) determinarán la perpendicular que se pide.

77. *Por un punto* (a. 3) (fig. 69) *de una recta dada, hacer pasar un plano perpendicular á esta recta.*

Debiendo ser la recta dada perpendicular á todas las que en el plano que se pide han de pasar por su pié, será perpendicular á la línea de máxima pendiente que ha de pasar por el punto dado en el plano que se busca, y ambas rectas estarán situadas en el plano vertical cuya traza es la proyeccion de la recta dada.

Tirando en este plano vertical una perpendicular á la recta dada desde el punto tambien dado (76), la escala de esta perpendicular será la del plano que se pide. En este caso la escala del plano pedido es la $a\,b$, que en el problema anterior resultó para la perpendicular en el punto (a. 3).

Se vé, por lo tanto, que cuando un plano es perpendicular á una recta, la escala del plano es paralela en proyeccion á la de la recta y la acotacion crece en sentido contrario.

78. *Por un punto tomado en una recta tirar perpendiculares á esta recta.*

Se hace pasar por el punto un plano perpendicular á la recta (77).

Todas las rectas que pasen por el punto dado, en este plano (53), serán perpendiculares á la recta dada (Geom. 54).

79. *Desde un punto* (a. 1′) (fig. 70) *de un plano vertical tirar una perpendicular á la recta del mismo plano proyectada en* e d.

Aplicaremos la recta al plano de proyeccion en *e D*, y el punto dado en A, tiraremos la perpendicular A *b* desde el punto á la recta, y proyectando *b* en la recta, la *c a* acotada será la perpendicular que se pide.

80. *Dada una recta situada en un plano, tirarle desde uno de sus puntos, una perpendicular situada en el mismo plano.*

Se tira por el punto dado un plano perpendicular á la recta (77). Se halla la interseccion de este plano con el dado (66) y esta será la perpendicular que se busca (Geom. Teor. 142 y recíproco).

81. *Dado un punto* (a. 4) (fig. 71) *situado en un plano* P, *levantar desde él una perpendicular al plano.*

Esta línea ha de ser perpendicular á la horizontal de cota 4, y á la línea de máxima pendiente del plano, correspondiente al punto dado.

Además, estará en el plano vertical que tiene por traza la paralela tirada por *a* á la escala del plano. Esta paralela acotada será la línea de máxima pendiente que pasa por el punto *a* en el plano.

Se aplica esta recta al plano horizontal y se tira la perpendicular á ella desde el punto 4′ (76) dado, la cual cumple con las condiciones que hemos indicado.

Las escalas de pendiente de estas rectas, perpendiculares entre sí, son iguales; pero inversas á partir del punto dado. Esto se verifica siempre que la pendiente de las rectas es de 45°.

82. *Dado un punto* (a. 3) (fig. 72) *fuera de un plano P, bajar una perpendicular á este plano.*

Se harán las construcciones siguientes:

1.ª Se tira por *a* una paralela á la escala del plano dado (35) y esta paralela será la línea de máxima pendiente del plano, la cual pasa por el punto dado.

2.ª Se aplica esta línea, en *m n*, al plano horizontal de cota 3, igual á la del punto dado.

3.ª Se tira *a b* perpendicular á *n m.*

4.ª Se proyecta el punto *b* en *c* y se determina su cota 5,6 en la escala del plano P.

La *c a* acotada, será la perpendicular que se pide.

83. *Hallar la distancia de un punto á un plano.*

Esta distancia es la perpendicular tirada al plano desde dicho punto.

Para hallarla es preciso verificar las siguientes construcciones:

1.ª Tirar por el punto dado una perpendicular al plano (82).

2.ª Hallar la interseccion de esta recta con el plano (68).

3.ª Hallar la magnitud de la recta que une el punto dado con esta interseccion (22), y esta será la distancia que se pide.

84. *Dada una recta acotada, cuya proyeccion es* a m (figura 73), *tirar por ella un plano perpendicular á otro plano dado* P.

Desde uno de los puntos (a. o) de la recta dada se tira una perpendicular al plano (82).

El plano de estas dos rectas (59) es el que se busca; pues además de pasar por la recta dada, es perpendicular al plano dado, (Geom. Teor. 141).

Para determinar este plano, se une el punto *c*, proyeccion del de interseccion *b* de la recta y el plano, con el punto de igual cota en la recta dada, y se tendrá una horizontal del plano que se pide; la cual, con una paralela á ella por el punto *a* nos determina la escala E de pendiente del mismo.

85. *Hallar la distancia entre dos planos paralelos* P, P' (fig. 74).

Esta distancia es la longitud de la perpendicular tirada á uno de los planos, desde un punto tomado en el otro.

Se traza una paralela *c d* á las escalas de los planos dados, en el plano horizontal de cota 8, y se aplican á este plano las líneas *a*, *a'*, que son las de máxima pendiente de los dados, las cuales tienen por proyeccion comun á la *c d*.

La distancia *m n* entre las rectas aplicadas *a* y *a'* es la magnitud que se busca.

86. *Hallar la distancia entre dos rectas paralelas.*

Se traza el plano que ellas determinan (59).

Desde un punto de una de ellas, se tira en este plano una perpendicular á la otra (80), y se halla la verdadera magnitud de esta perpendicular (22).

87. *Hallar la distancia entre dos rectas del espacio, que se cruzan sin cortarse.*

Esta distancia es la línea perpendicular á la vez las dos rectas dadas. (Geom. Prob. 50).

Para resolver este problema, haremos las siguientes construcciones:

1.ª Por un punto de una de las rectas dadas *a*, se tira una paralela *c* á la otra recta *b* (35).

2.ª Se construye el plano de las *a*, *c* (59).

3.ª Desde un punto de la segunda *b*, se tira una perpendicular á este plano (82).

4.ª Se halla la interseccion de esta perpendicular y el plano á que lo es (68). Este punto y el dado determinan la recta que se pide.

5.ª Se halla despues su verdadera magnitud (22).

## ÁNGULOS DE LAS RECTAS Y DE LOS PLANOS.

88. *Hallar el ángulo de dos rectas dadas.*

Si las rectas dadas fuesen la *e b* acotada (fig. 68), y la que quedaría determinada uniendo los puntos (c. 3) y (b. 8), hariamos girar el punto proyectado en *b*, que sería la interseccion de ambas rectas, alrededor de la horizontal *e c* de cota 3, con lo que dicha interseccion iria á parar á *d* (74). Estando los pun- *c, d* y *e* en un mismo plano horizontal, uniendo *d* con *e* y con *c*, el ángulo *e d c* seria el de las dos rectas dadas.

89. *Por un punto dado* (c. 3) (fig. 68) *hacer pasar una recta que forme con la* e b *acotada un ángulo dado.*

Se aplica la recta dada al plano horizontal que tiene la cota 3 del punto dado *c*, haciéndola girar alrededor de la horizontal *c e* que tiene dicha cota y *e d* será la recta aplicada. Se hace pasar por *c* una recta que forme con la *e d* un ángulo igual al dado (Geom. Prob. 7), con lo que se determinará un punto tal como *d*, que será la interseccion de estas dos rectas.

Bajando desde *d* la perpendicular *d b* al eje del giro, esta cortará á la recta dada *e b* en un punto *b*, y el (b. 8) será la proyeccion acotada del vértice del ángulo en la posicion que debe ocupar en el espacio. La recta que uniese *b* con *c* seria la proyeccion acotada de la que pasando por (c. 3), formaria con la dada *e b* el ángulo que se pedia.

90. *Hallar el ángulo que dos planos dados forman entre sí.*

Por el punto *c* (fig. 59) de la proyeccion *m n* de la interseccion de los planos dados, se traza una perpendicular á esta línea, hasta que corte en *a* y *b* á las horizontales de cota 5, en cada uno de los planos. La *a b* será una horizontal de esta cota y al mismo tiempo la traza de un plano perpendicular á la interseccion *m n*.

Apliquemos esta interseccion al plano horizontal de cota 5, y sea *n o* la interseccion aplicada; tiremos por *c* la *c s* perpendicular á *n o* y esta perpendicular será la magnitud de la recta, que une el punto *s*, en que la *m n* corta al plano perpendicular á ella y cuya traza es *a b*, con el punto *c*, proyeccion de la interseccion de esta traza con el plano perpendicular á ella que pasase por la recta *m n*.

Llevando *s* á *t* por un arco de círculo, uniendo el punto *t* con los *a* y *b*, y trazando las rectas *t a* y *t b*, el triángulo *a t b* será la aplicacion al plano horizontal de cota 5, del que forman con la traza *a b* del plano perpendicular á *o s*, las rectas *t a*, *t b*, que en dicho plano pasan por su pié *s*; y que por lo tanto son perpendiculares á *o s*, que es la interseccion de los dos planos: luego el ángulo *a t b* que estas perpendiculares forman es el ángulo pedido.

2

A

## LÍNEAS CURVAS.

91. Una curva A B C del espacio (fig. 75), se representa, en general, por su proyeccion *a b c* sobre el plano horizontal de comparacion, y las cotas de varios de sus puntos. Estas cotas y la forma de la proyeccion pueden servir para determinar la naturaleza de la curva representada.

Una curva *a b c* situada en el plano de proyeccion, en la cual todos sus puntos tienen la misma cota *n*, representa una curva situada en el plano horizontal de cota *n*.

Si la proyeccion *a*, ó *a'* (fig. 76) es la de una circunferencia *A* situada en el plano horizontal de cota *n*, la curva representada será tambien una circunferencia, y bastará acotar tres de sus puntos con el número *n*, que espresa la cota del plano. La cota *n* de A es 21,2.

Para *construir* en estos casos la curva representada, no habrá mas que cortar por un plano horizontal tirado á la altura de *n* metros sobre el de comparacion, la superficie cilíndrica cuya directriz es la proyeccion dada y cuya generatriz es la vertical proyectante de uno de los puntos de la curva.

92. Si la proyeccion *a b* (fig. 77) es una recta, y los puntos acotados no están todos situados en la recta que determinan dos de ellos (33), la *ab* acotada representará una curva *AB* situada en un plano vertical.

Si esta curva es cerrada (fig. 78), á cada punto de la proyeccion corresponden dos cotas, á escepcion de los puntos extremos, que cada uno es la proyeccion de un solo punto de ella.

Cuando son dos, *r*, *r'* (fig. 79), ó mas, las curvas situadas en un mismo plano vertical, se acentúan de una misma manera todos los puntos que corresponden á una misma curva, para poderlos distinguir de los de otra, cuya comun acentuacion será distinta de la que tienen los puntos de la primera. Una tercera curva tendria sus puntos acentuados de diferente modo que las dos anteriores, y así sucesivamente.

Para *construir* en estos casos la curva representada, no habria mas que seguir el método general de levantar perpendiculares al plano de comparacion, en las proyecciones de los puntos acotados, y tomar en estas perpendiculares, que determinarian un plano vertical, las alturas marcadas por las cotas. La curva que hiciésemos pasar por los puntos así determinados, seria la curva cuya representacion nos era conocida.

93. Toda curva cuyos puntos están diferentemente acotados, representa en general una curva del espacio; *plana*, si el plano que pasa por tres de sus puntos (58) contiene á los demás (50), y *de doble curvatura*, si esto no se verifica.

Se reproduce la curva representada, tomando en las verticales (1) de los distintos puntos acotados, las alturas que las cotas indican, y haciendo pasar una curva contínua por los puntos así determinados.

Se vé, que cuanto mayor sea el número de puntos acotados, tanto mejor determinada estará la curva.

La (fig. 80) representa una *hélice*, y la (fig. 81) su proyec-

(1) Si se quisieran hallar las distancias de un punto á otro de la curva habria que tomar las alturas en la escala de las horizontales.

cion acotada. Esta proyeccion es una circunferencia, dividida en partes iguales por los puntos de cota entera.

## SUPERFICIES CURVAS.

94. Las superficies curvas se representan, en general, por las proyecciones acotadas de los elementos necesarios para determinarlas.—Así, un cono se representa por las proyecciones acotadas de su base ó directriz $(3 - 3' - 3'')$ (fig. 82) y la del vértice ($v$. 9,8); pues uniendo $v$ con un punto cualquiera $r$, $n$.... de la base, se tendrán las proyecciones acotadas $vr$, $vn$, de las generatrices del cono.

Suelen dibujarse las proyecciones que resultan tangentes á la base, y son las de las generatrices que determinan el contorno aparente de la superficie en el plano horizontal.

95. Una superficie cilíndrica se representa por su directriz B (fig. 83), cuya cota suponemos ser el número 5, y una de las generatrices acotada $hg$; pues se podrán determinar cuantas generatrices se quiera, tirando paralelas á la generatriz dada, desde los puntos de la base. Se trazan por lo regular las que determinan, en el plano horizontal, el contorno aparente de la superficie.

96. Las superficies de *revolucion* se determinan por un meridiano y un paralelo.

97. Una *superficie gaucha*, por sus directrices, y el plano ó cono director.

### PROBLEMAS DE LAS SUPERFICIES.

98. *Dada una superficie cónica y un punto* (a,4,7) (fig. 82), *determinar si este se halla en la superficie.*

Unase el punto $a$ con la proyeccion $v$ del vértice, y prolónguese la recta que resulte, hasta encontrar en $n$ á la parte cóncava de la circunferencia.

La recta $v\ n$, será la generatriz cuya proyeccion pasa por la del punto dado; se vé si el punto dado está en esta recta (33), en cuyo caso estará tambien en la superficie.

Esta generatriz *vn* pertenece á la parte vista de la superficie.

El punto proyectado en *a*, estará en la generatriz *vn*, y el punto cuya proyeccion es *b*, y cuya cota es 5,1, en la generatriz oculta *v r*.

El punto *a* puede ser tambien la proyeccion de otro punto de la superficie, situado en la generatriz oculta *vm*, prolongada por debajo del plano de la base. El punto *b* puede pertenecer tambien á otra generatriz vista, que se determinaria prolongando la *v r* hasta encontrar á la parte cóncava de la base.

99. *Por un punto* (a. 7,8) (fig. 84) *situado en una superficie cónica, tirar un plano tangente á esta.*

Se traza la generatriz que pasa por el punto dado (98), y la tangente T á la base del cono en el pié de la generatriz; el plano de esta y la tangente T, es el plano que se pide. Para representarle, se tira por *v* una paralela á la tangente, que será la horizontal de cota 13 del plano. La perpendicular á estas dos paralelas será la escala E del plano tangente al cono, y que pasa por (*a*, 7,8).

Si el punto es dado por su proyeccion solamente, el problema tiene dos soluciones P y P′ que corresponden á las dos generatrices *v n*, *v m*, cuyas proyecciones pasan por *a*, y las tangentes respectivas T y T′.

100. *Por un punto dado (a.* 8) (fig. 85) *fuera de una superficie cónica, hacer pasar un plano tangente á esta.*

Se une *a* con la proyeccion *v* del vértice del cono, se halla la traza *r* (38) de esta recta en el plano horizontal de cota 5, en que se halla la base del cono, y se tira por *r* una tangente T á esta base.

La paralela á la tangente, tirada desde *v*, será la horizontal de cota 12 del plano que se busca, y la perpendicular E á esta horizontal y á la tangente, la escala acotada del mismo.

En efecto, este plano, pasando por la tangente T, será tangente al cono, y como además pasa por *r a* (51), cumple con las condiciones pedidas.

Este problema admite otra solucion correspondiente á la otra tangente que puede tirarse por *r* á la base del cono.

101. *Hallar la interseccion de un plano con una superficie cónica.*

Se trazarán las generatrices del cono que se crean necesarias, y se determinarán sus intersecciones respectivas con el plano dado (68). La curva que pase por los puntos así determinados, es la interseccion del plano y la superficie.

102. Los problemas de que acabamos de ocuparnos, se resuelven de una manera análoga, cuando se trata de una superficie cilíndrica.

## REPRESENTACION DE LAS SUPERFICIES POR CURVAS DE NIVEL.

103. **Representacion de las superficies.**—Supongamos un cono recto, cuya proyeccion vertical es $b'\ v'\ b'$ (fig. 86). Si dividimos su altura $a\,v'$ en partes iguales, y por los puntos de division $a'$, $a''$.... hacemos pasar planos horizontales, cuyas trazas serán P, P'..., las intersecciones de estos planos con la superficie cónica, serán circunferencias (Geom. Teor. 162), que tendrán respectivamente por radios las rectas $a'\ c'$, $a''\ d''$.... y que segun la condicion á que los planos satisfacen, se proyectarán horizontalmente, en su verdadera magnitud, segun las circunferencias $c$, $d$.....

Estas proyecciones han recibido por extension el nombre de *curvas de nivel* ó mas propiamente *secciones* ó *curvas horizontales*.

104. Si la proyeccion vertical de la superficie es $b'\ v'\ b'$ (fig. 87), y la suponemos engendrada por el movimiento de la línea quebrada $v'\ d'\ c'\ b'$, alrededor del eje vertical $v\ v'$, las curvas de nivel serán tambien circunferencias, y se proyectarán del mismo modo.

105. Examinando la representacion de las superficies de revolucion, cuya generacion hemos considerado (103 y 104), podemos establecer los principios siguientes:

1.° *Cuando una superficie está engendrada por una línea recta* (fig. 86), *la distancia entre las curvas de nivel consecutivas, contada en direccion normal á ellas, es una longitud constante.*

En efecto, siendo $v\ b$ la proyeccion de la generatriz $v'\ b'$, se tiene $b\ c = c\ d = d\ e = e\ v$ (28).

2.° *La pendiente de los elementos* b' c', c' d'..... *es tambien constante.* En efecto, la de $b'\ c'$ es $\dfrac{c'\,m}{m\,b'} = \dfrac{c'\,m}{c\,b}$, y la de $c'\ d'$ es

$\frac{d'n}{nc'} = \frac{d'n}{dc}$ (25); y estas fracciones, así como las que expresan la pendiente de los demás elementos, tienen iguales sus numeradores y sus denominadores.

3.° *Cuando la generatriz está formada de rectas que tienen inclinaciones diferentes entre los planos secantes, las curvas no equidistan, y la mayor separacion entre ellas pertenece á la menor pendiente de la parte de generatriz que se considera.*

En efecto, la pendiente $\frac{c'm}{mb'} = \frac{c'm}{cb}$ (fig. 87) de la porcion de generatriz $c'b'$, tiene su numerador igual al de la $\frac{d'n}{nc'} = \frac{d'n}{dc}$ que corresponde al elemento $c'd'$, y su denominador $cb$ es mayor que el $dc$ de la segunda; luego el quebrado $\frac{c'm}{cb}$ es menor que el $\frac{d'n}{dc}$, y por tanto $c'b'$ tiene menor pendiente que $c'd'$.

106. Haciendo extensivos estos principios á las superficies curvas de formas irregulares cualesquiera, determinaremos el relieve de una superficie, por las proyecciones horizontales de las curvas, que resultan de las intersecciones de la superficie, con cierto número de planos horizontales equidistantes.

Esta manera de representar las superficies, dá una idea clara de su forma, y de la rapidez de su pendiente, en el sentido en que se quiera considerar: teniendo en cuenta, que la mayor separacion de las curvas corresponde á la menor pendiente, y al contrario. Si en algun punto viniesen á concurrir dos ó mas curvas, nos darian á conocer que el terreno era *vertical* ó *cortado á pico* en toda la extension que las curvas tuviesen comun.

107. La zona comprendida por dos curvas de nivel consecutivas $c$ y $c'$ (fig. 88), se considera engendrada por el movimiento de una recta $m\,n$ que se apoya constantemente sobre las curvas $c$ y $c'$. La superficie que la generatriz $m\,n$ engendraria, seria una superficie *gaucha* en general; pero admi-

tiendo que las curvas estén bastante próximas, para que la generatriz pueda suponerse normal á ambas directrices, la superficie seria desarrollable; puesto que para pasar de una posicion á otra infinitamente próxima se mueve sobre dos tangentes, que en la suposicion que hacemos, se pueden considerar constantemente paralelas para cada posicion de la generatriz.

108. *Líneas de máxima pendiente de las superficies.*

La generatriz M N (fig. 89), normal á las directrices por la ley de generacion de la zona comprendida entre las curvas de nivel C y C', y situada en el plano de las tangentes (107), será tambien normal á estas tangentes, que tienen un elemento comun con las curvas respectivas, y por lo tanto, será la línea de máxima pendiente del plano tangente (41). Esta línea es tambien la de *máxima pendiente de la superficie.*

Si proyectamos el punto M en el plano horizontal que contiene á C, N *m* será la proyeccion de la línea de máxima pendiente M N. Esta proyeccion es tambien normal á T, y á *t'* proyeccion de la tangente T' (41) y por lo tanto á las curvas C y *c'*, proyecciones de las curvas C y C', en el plano horizontal de la curva C.

109. Si desde un punto *a* (fig. 90) de una superficie, se baja la normal *a b* á la curva inmediata y desde *b* la *b d*, normal á la curva siguiente, y se continúa este trazado de normales, la línea *a b d e*, será la que tiene en general la máxima pendiente entre todas las trazadas en la superficie por el punto *a*.

Si el punto *a* estuviese en la zona comprendida entre dos curvas, la línea de máxima pendiente, que le corresponde en la superficie, se hallaria del mismo modo.

Esta línea es en general de doble curvatura.

110. Cuando la superficie es convexa en sentido horizontal, como representa la fig. 91, se pueden tirar tres normales *a b*, *a b'*, *a b''*, desde el punto mas saliente *a* de una de las curvas de nivel á la curva inmediata inferior. La normal *a b''* tirada desde *a* al punto mas saliente *b''* inmediato inferior, es una *línea de mínima pendiente* en la porcion *a b b'* de la superficie, por ser *a b''* mayor que todas las demás rectas tiradas desde *a* á la porcion *b b'' b'* de la curva inmediata.

La línea *a b'' d'' e''*, de mínima pendiente, divide á la superficie en dos porciones $a e'' m$, $a e'' n$, á cada una de las cuales corresponde para el punto $a$, una línea de máxima pendiente $a e$, $a e'$. Otra recta $a c$ seria de menor pendiente que $a b$ (105.-3.°).

111. Si la superficie es cóncava en sentido horizontal, no habria desde $a$ (fig. 92) mas que una sola normal $a b$ á la curva inferior. Toda otra recta $ae$ tendria menor pendiente que $a b$.

La $a b c d$, seria por lo tanto, una línea de máxima pendiente. A

## PROBLEMAS DE LAS SUPERFICIES Y SUS NORMALES.

112. *Hallar la inclinacion ó pendiente de la normal cuya proyeccion es* m n (fig. 93).

Siendo $m n$ la proyeccion acotada de la normal, su pendiente será $p = tg.\, a = \frac{m\,o}{m\,n}$ (25); siendo $o\,n$ la normal aplicada al plano horizontal de la curva 2, y $o\,m$ la equidistancia de los planos. Llamando $e$ á esta equidistancia, y $l$ á la longitud de la proyeccion $m\,n$ de la normal, tendremos

$$p = tg.\, a = \frac{e}{l} \text{ [5]}.$$

113. *Dadas dos curvas de nivel con sus cotas respectivas* (fig. 93), *determinar la de un punto comprendido entre ellas, y cuya proyeccion* b *es dada.*

Se tira por $b$ la normal $m\,n$ á las curvas, con lo que se tiene la proyeccion acotada de una recta de la superficie, en la cual estará la proyeccion $b$ del punto cuya cota se busca, y estaremos en el caso del problema 23.

114. *Dadas dos curvas de nivel con sus cotas respectivas* (fig. 93) *y la cota que corresponde á un punto de la normal, cuya proyeccion es* m n, *hallar la proyeccion de dicho punto.*

Se tiene la proyeccion acotada de la normal $m\,n$, en que se halla el punto cuya cota es dada. La proyeccion de este punto se determina por el problema 24.

115. *Dada una superficie por las proyecciones y las cotas de sus curvas horizontales, hallar la proyeccion de una curva de cota intermedia dada, 2,5 por ejemplo.*

Se trazan las normales $n'$, $n''$... (fig. 93) entre las curvas 2 y 3, cuyas cotas comprenden á la que ha de tener la curva que se quiere trazar, y se determina en cada normal la proyeccion del punto cuya cota es 2,5 (114). La curva $r\ s$ que pasa por estas proyecciones es la curva pedida.

116. *Dadas las proyecciones de dos puntos situados en una superficie representada por curvas de nivel, hallar la longitud é inclinacion de la recta, que une en el espacio los puntos cuyas proyecciones son dadas.*

Se hallarán las cotas de estos puntos (113), y á continuacion la longitud de la recta que los une (22), y su pendiente (25).

117. *Dadas dos curvas y un punto* m (fig. 94) *de una de ellas, determinar una recta de pendiente dada, que vaya desde* m *á un punto de la otra curva.*

La longitud $l$ de la proyeccion de la recta que buscamos, se deduce de la ecuacion [4] (25), en la que se conoce $p$, que es la pendiente dada, y $d$, que es aquí la equidistancia $e$ de los planos secantes, que han determinado las secciones de la superficie. Tomando en la escala la magnitud $l$ calculada, y haciendo centro en $m$ se trazará, con ella como rádio, un arco que cortará á la otra curva en un punto $c$, y entonces $c\ m$ será la proyeccion acotada de la recta que se busca.

Este problema admite en general dos soluciones, pues el arco trazado puede cortar á la curva en otro punto $c'$, y la recta $m\ c'$ cumple del mismo modo con las condiciones pedidas. Puede ser tambien imposible, cuando el valor de $l$ resulta menor que la normal $m\ g$, tirada desde $m$ á la otra curva, y tener una solucion, cuando dicho valor es igual á la longitud de esta normal.

Otra proyeccion cualquiera $m\ d$ corresponderia á una línea de inclinacion diferente.

En efecto, sea $l'$ la longitud de $m\ d > m\ c$ ó de $m\ g < m\ c$; llamando $p'$ á la pendiente de esta línea, tendriamos para ella $p' = \frac{e}{l'}$; de donde resulta $e = p' \times l'$. Tambien deduciriamos de la ecuacion [5] (112) $e = p \times l$; y comparando esta ecuacion con la anterior tendriamos $p' \times l' = p \times l$; y como suponemos que es $l' > l$ ó $l' < l$, resultará $p' < p$ ó $p' > p$.

118. *Dado un punto* A (fig. 95) *de una superficie, trazar*

*desde él en la misma superficie, una línea de pendiente dada.*

Conocida la equidistancia $e$, y la pendiente $p$ dada, hallariamos la longitud $l$ que nos ha de dar el punto $m$, y la A $m$ que tiene la pendiente dada (117). Si la equidistancia de las curvas fuese 5 metros y la pendiente $p = \frac{5}{100}$, encontrariamos $l = 100$ metros, y esta magnitud seria la que deberiamos tomar en la escala para trazar el arco, que en su interseccion con la curva de cota 10 nos ha de dar el punto $m$.

A partir de $m$ y con el mismo rádio, determinariamos del mismo modo el punto $n$ de la curva inmediata superior; y así continuando, obtendriamos una línea poligonal A.... $n$.... $t$ $v$ B, que tendria la pendiente dada.

Como la determinacion de cada punto tiene en general dos soluciones (117), se ha convenido en distinguir con los nombres de *camino directo* á la línea $A\ m\ n\ r$...., determinada por las soluciones, que dan los puntos mas próximos á otro fijo B, y *camino indirecto* á la linea $n\ r'\ s'$.... cuyos puntos pertenecen á las soluciones que tienden á alejar del mismo punto B la línea que se traza.

En el problema de cuya resolucion nos estamos ocupando, el camino directo $A\ m\ n\ r\ s\ t\ v\ B$ es la mas corta distancia de A á B, caminando por la superficie y siguiendo una línea de la pendiente dada. El camino $A\ m\ n\ r\ s\ t\ v'\ x'\ B$ será mayor que el anterior en la longitud $x'$B. El punto $x'$ resulta de tomar en $v'$ B desde $v'$ una magnitud igual á $t\,v'$.

Debemos observar, que la línea trazada como acabamos de decir, se aproximará bastante á coincidir con la superficie, cuando la curvatura sea uniforme, como en la porcion A $n$ de la línea $A\ B$ de camino directo. Cuando la superficie presenta una parte entrante, la línea de pendiente pasa en general por encima de la superficie, como en los elementos $n\ r$ y $t\ v$, y por debajo de la misma cuando presenta una parte saliente como le sucede al elemento $r\ s$.

119. Para trazar, en general, la línea mas corta de pendiente dada entre dos puntos fijos A y B (fig. 96), se traza desde A la línea A$t$ de camino directo, y desde B la B $d$ de camino indirecto, hasta que estas líneas se encuentren en un punto $v$. Entonces la línea poligonal $A\ m\ r\ s\ v\ c\ B$

119 b. Se pueden hallar las verdaderas distancias entre dos puntos de la superficie hay que tomar las dis tancias verticales en la escala de [illegible] horizontales

resuelve el problema, que en general tiene dos soluciones.

La otra solucion se hallaria trazando desde A la línea de camino indirecto y desde B la de camino directo.

Este problema tiene muchas é importantes aplicaciones en los trazados de los caminos y de los canales.

## INTERSECCIONES.—PERFILES.

120. *Hallar la interseccion de una superficie* S (fig. 97) *con un plano dado* P.

Se prolongan las horizontales del plano hasta que corten á las curvas de igual cota.

Los puntos de interseccion así determinados, son las proyecciones acotadas que se buscan.

En efecto, ellos tienen su proyeccion en las proyecciones de dichas rectas y en las curvas de la superficie, y además tienen la misma cota que los puntos correspondientes de esta.

La interseccion que buscamos se hallará, uniendo por una curva contínua los puntos que hemos encontrado.

Para hallar el punto culminante *m* de la interseccion, se traza la normal (8 — 7), y se hace pasar un plano por ella, cuya interseccion con el dado será la recta (7′ — 8′) (66).

El punto *m*, interseccion de (8 — 7) y (8′ — 7′), perteneciendo al plano P y á la superficie, será el punto culminante de la seccion.

121. *Hallar la interseccion de una recta* R (fig. 98) *con una superficie dada* S.

Se hará pasar un plano cualquiera por la recta (57), y se determinará su interseccion Q con la superficie (120).

El punto *m* en que R y Q se cortan es un punto comun á la superficie y al plano, pues pertenece á Q; y estando en el plano y su proyeccion en la de la recta, estará tambien en R; luego es la interseccion de esta recta y la superficie.

122. *Hallar la interseccion de una curva y una superficie irregular.*

Sea S (fig. 99) la superficie y A B la curva dada.

Desde un punto *a* de cota entera de la curva AB, se tira una recta á un punto cualquiera de la curva de nivel de la superficie, que tiene la misma cota.

La *a b* será una horizontal, y si suponemos que se mueve paralelamente á sí misma recorriendo todos los puntos de A B, determinará una superficie cilíndrica de generatrices horizontales, que cortará á las curvas de la superficie segun las rectas (8′—8″) (9′ — 9″)... paralelas entre sí.

La línea (8″ — 9″ —10″...) será la interseccion de la superficie dada con la superficie cilíndrica horizontal; y el punto *m* perteneciendo á S y á A B es la interseccion pedida.

123. *Hallar la interseccion de una superficie y un plano vertical.*

Sea M (fig. 100) la traza del plano. Si hacemos mover el plano paralelamente á sí mismo hasta que M ocupe la posicion M′, y le aplicamos al plano horizontal de cota 5, que es el de la curva inferior de la superficie, los puntos en que el plano secante corta á la curva 5 se habrán movido tambien paralelamente á sí mismos, puesto que están en la traza que sirve de eje al giro ejecutado para la aplicacion del plano secante, y habrán ido á ocupar las posiciones 5′, despues de haber recorrido las líneas (5 — 5′) perpendiculares á la traza M.

Si trazamos las rectas P, P′, P″, paralelas á M y separadas entre sí por la equidistancia *m n* de los planos horizontales, las rectas P, P′, P″, serán las intersecciones de estos planos con el vertical dado, y serán por lo tanto horizontales de este plano.

Ahora, el punto *r* de la traza M es la proyeccion de un punto de la superficie, el cual se encuentra en la vertical que pasa por él; esta vertical se halla aplicada segun *m n*; y como la cota del punto proyectado en *r* es 6, *n* será este punto de la superficie; es ademas un punto de la horizontal de cota 6 del plano vertical; luego lo será tambien de la interseccion.

Resolveremos este problema, trazando una recta M′, paralela á la traza M, tirando las paralelas P, P′, P″, separadas entre sí una cantidad igual á la equidistancia de las curvas, que determinan la superficie, y hallando las intersecciones de cada una de estas horizontales con las perpendiculares levantadas á la traza M desde los puntos de igual cota. (1)

La curva que pasa por los puntos de interseccion, hallados como acabamos de decir, es la interseccion que se pide.

124. **Perfiles.**—La interseccion de una superficie y un plano, la cual acabamos de ver como se determina, se llama el *perfil* de la superficie, en la direccion de la traza M del plano dado.

(1) Si se quieren hallar las verdaderas distancias entre dos puntos de la superficie hay que tomar las distancias verticales en la escala de las horizontales

125. Para determinar la forma de una superficie en la direccion de una recta M, se halla la interseccion de la superficie y el plano vertical cuya traza es M (123). Nuevos planos secantes, trazados en diversas direcciones, darian otros tantos perfiles, que proporcionarian un conocimiento de la forma que la superficie afecta, tan completo como pueda desearse.

126. Si se quieren conocer las inflexiones, que la superficie del terreno presenta, siguiendo una direccion curvilínea dada *a b... h* (fig. 101), se determina la interseccion de la superficie dada y la cilíndrica engendrada por una vertical, que recorriese todos los puntos de la curva dada.

Se resolveria este problema y se formaria el perfil (fig. 102), llevando á partir de un punto *a'*, tomado sobre una horizontal indefinida, que representa el plano de comparacion, las partes *a' b'*, *b' c'*... iguales á los desarrollos respectivos de las porciones *a b*, *b c*... (fig. 101) de la directriz, comprendidas entre las curvas de la superficie; despues se levantarán desde los puntos marcados *b'*, *c'*..., perpendiculares á *a'h'*, hasta encontrar á la horizontal que marca la cota correspondiente á cada punto.

La directriz dada, puede componerse de elementos alternativamente rectilíneos y curvilíneos. Entonces la superficie engendrada por la vertical, se compondrá de elementos planos correspondientes á los primeros, y elementos cilíndricos correspondientes á los segundos. Se resolverá el problema del mismo modo que el anterior, y el perfil se obtendrá tomando sobre la horizontal que representa el plano de comparacion, las longitudes de las porciones rectas de la directriz y los desarrollos de las porciones curvas.

127. *Dado un perfil* T (fig. 100) *y su traza* M, *determinar las proyecciones, que sobre ella corresponden á los puntos de cota entera del perfil.*

Tírense las trazas P, P′, P″ de los planos secantes de cota entera, y proyéctense sobre la traza M sus intersecciones con la curva T.

Si esta traza fuese una curva *a h* (fig. 101), se obtendria cada punto, *b* por ejemplo, dividiendo *a' b'* (fig. 102) en un número de partes de magnitud tal, que llevadas á la curva, cada una de ellas se confundiese sensiblemente con el elemento correspondiente de la misma.

El mismo procedimiento se seguiria para los elementos cur-