ó mas sencillamente:

$$x=\varphi(u,t); \quad y=\psi(u,t) \qquad (1)$$

El problema se descompone en tres partes: *primero*, expresar en funcion de $u$, $t$ el coeficiente $(F\ x,\ y)$; *segundo*, expresar en funcion de $u$, $t$ y $du \times dt$ el producto $dx$, $dy$; *tercero*, determinar los nuevos límites.

*Núm.* 67. I. Para expresar $F(x, y)$ en funcion de $u$, $t$, bastará evidentemente sustituir en $F$ por $x$ é $y$ sus valores (1), y tendremos:

$$F(x,y)=F\Big(\varphi(u,t),\ \psi(u,t)\Big)=F_1(u,t).$$

*Núm.* 68. II. En cuanto á la determinacion de $dx\ dy$, el problema no es tan sencillo.

Parece á primera vista que bastará diferenciar las ecuaciones (1), con lo que se obtendrá

$$dx=\varphi'_u(u,t)\,du+\varphi'_t(u,t)\,dt$$

$$dy=\psi'_u(u,t)\,du+\psi'_t(u,t)\,dt$$

y multiplicar despues los valores de $dx$, $dy$; pero este método sería radicalmente falso, no porque no pudiese en rigor hacerse esta sustitucion en cada *elemento* de la integral, sino porque la integral misma perdería su significacion, convirtiéndose en otra suma de otra clase especial, pues entrarian $du^2$ y $dt^2$.

Es necesario para vencer la dificultad proceder por partes.

Supongamos que en primer lugar se trata de eliminar $y$ de la expresion propuesta en funcion de $t$.

$y$ es funcion de $u$, $t$, segun las ecuaciones (1), pero $u$ es funcion de $t$, de modo que podemos considerar á $y$ como funcion de $t$ únicamente.

Tendremos segun esto

$$dy = \varphi'_t(u,t)\,dt + \varphi'_u(u,t)\,\frac{du}{dt}\,dt =$$

$$\left(\varphi'_t(u,t) + \varphi'_u(u,t)\,\frac{du}{dt}\right)dt$$

y para determinar

$$\frac{du}{dt}$$

diferenciaremos la segunda ecuacion (1), recordando siempre que solo atendemos á la integracion en $y$, que solo eliminamos $y$, y que por lo tanto $x$ es una constante, resultará pues

$$\psi_t'(u,t) + \psi'_u(u,t)\,\frac{du}{dt} = o$$

de donde

$$\frac{du}{dt} = -\,\frac{\psi'_t(u,t)}{\psi'_u(u,t)}.$$

Sustituyendo este valor en el valor de $dy$ hallaremos

$$dy = \left[\varphi'_t(u,t) + \varphi'_u(u,t) \times -\,\frac{\psi'_t(u,t)}{\psi'_u(u,t)}\right]dt =$$

$$\frac{\varphi'_t(u,t)\,.\,\psi'_u(u,t) - \varphi'_u(u,t)\,.\,\psi'_t(u,t)}{\psi'_u(u,t)}\,dt$$

y la integral $U$ se convertirá en

$$U = \int dx \int F(x,y)\left[\frac{\varphi'_t\psi'_u - \varphi'_u\psi'_t}{\psi'_u}\right]dt$$

de la cual deberíamos eliminar $u$ é $y$ en funcion de $x$ y $t$, determinando además los límites convenientemente.

Para completar la transformacion eliminemos $dx$, suponiendo que á la variable $x$ queremos sustituir la $u$ conservando la $t$.

Observemos que $x$ es funcion de $u$ porque se tiene

$$x = \varphi(u, t),$$

pero que en esta ecuacion entra la $t$, que es funcion de $u$, segun indica la ecuacion

$$y = \psi(u, t).$$

Tendremos

$$dx = \left(\varphi'_u + \varphi'_t \frac{dt}{du}\right) du$$

pero la integracion relativa á $x$ supone $t$ constante, luego

$$\frac{dt}{du} = o,$$

luego

$$dx = \varphi_u' du$$

valor que sustituido en $U$ da

$$U = \int\int F(x, y) \frac{\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t}{\varphi'_u} dt \,.\, \varphi'_u du =$$

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} F(x, y) \left[\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t\right] du\, dt.$$

claro es que en esta ecuacion deberemos eliminar $x$ é $y$ del coeficiente $F$.

*Núm.* 69. III. Para determinar los nuevos límites deduciremos:

1.° Los límites inferiores de $u$, $t$, de las ecuaciones

$$a = \varphi(u, t); \quad b = \psi(u, t).$$

2.° Los límites superiores de estas otras

$$a_1 = \varphi(u, t); \quad b_1 = \psi(u, t).$$

Representando por $c$ y $d$ los valores de $u\,t$ deducidos del primer sistema y por $c_1$, $d_1$ los correspondientes al segundo, tendremos definitivamente

$$U = \int_a^d \int_{a_1}^{d_1} F\left[\varphi(u,t),\ \psi(u,t)\right]$$

$$\left[\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t\right] du\,.\,dt. \qquad (2)$$

*Integrales triples.* *Núm.* 70. Sea la integral

$$U = \int_a^b \int_{a'}^{b'} \int_{a''}^{b''} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

en la que para mayor sencillez supondremos constantes los límites.

Nos proponemos sustituir á las variables $x$, $y$, $z$ las $t$, $u$, $v$.

El problema, como en el caso anterior, se descompondrá en tres partes.

1.ª Debemos eliminar $x$, $y$, $z$ de $F$ por medio de las tres relaciones

$$x = \varphi(t, u, v);\quad y = \chi(t, u, v);\quad z = \psi(t, u, v) \qquad (1)$$

de suerte que tendremos

$$F(x, y, z) = F\left[\varphi(t, u, v), \chi(t, u, v)\, \psi(t, u, v)\right]$$

2.ª Supongamos que la primera integracion se refiere á $x$: tendremos

$$U = \int_{a''}^{b''} \int_{a'}^{b'} dy\,.\,dz \int_a^b F\, dx.$$

Sustituyamos á la variable $x$ la variable $t$ por medio de la ecuacion

$$x = \varphi(t, u, v)$$

en la que $u$, $v$ son funciones de $t$ determinadas por las dos últimas relaciones (1).

Diferenciando tendremos

$$dx = \left[\varphi'_t + \varphi'_u \frac{du}{dt} + \varphi'_v \frac{dv}{dt}\right] dt,$$

y para eliminar

$$\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt},$$

tendremos asimismo

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \chi'_t + \chi'_u \frac{du}{dt} + \chi'_v \frac{dv}{dt} \\ 0 &= \psi'_t + \psi'_u \frac{du}{dt} + \psi'_v \frac{dv}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

que se obtienen diferenciando

$$y = \chi, \; z = \psi,$$

y observando que en la primera integracion $y$, $z$ son constantes.

Las ecuaciones (2) dan

$$\frac{du}{dt} = \frac{\psi'_t \chi'_v - \chi'_t \psi'_v}{\chi'_u \psi'_v - \psi'_u \chi'_v}; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\psi'_u \chi'_t - \psi'_t \chi'_u}{\chi'_u \psi'_v - \psi'_u \chi'_v};$$

y sustituyendo en el valor de $dx$

$$dx = \Big[\varphi'_t(\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v) + \varphi'_u(\psi'_t\chi'_v - \chi'_t\psi'_v) +$$

$$+ \varphi'_v(\psi'_u\chi'_t - \psi'_t\chi'_u)\Big] \frac{dt}{\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v}.$$

La integral $U$ tomará, pues, el valor

$$U = \int_{a''}^{b''}\int_{a'}^{b'}\int_{c}^{d} F\Big[\varphi'_t(\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v) +$$

$$+ \varphi'_u(\psi'_t\chi'_v - \chi'_t\psi'_v) + \varphi'_v(\psi'_u\chi'_t - \psi'_t\chi'_u)\Big]$$

$$\frac{dt}{\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v}\, dy\,.\,dz.$$

Queda el problema reducido á eliminar las dos únicas variables $y$, $z$ en funcion de $u$, $v$ por medio de las relaciones

$$y = \chi(t, u, v) \ ; \quad z = \psi(t, u, v),$$

para lo cual basta sustituir segun la fórmula (2) del núm. (69) á $dy$, $dz$, el producto $(\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v)\, du\,.\,dv$.

Tendremos, pues, finalmente

$$U = \int_{c''}^{d''}\int_{c'}^{d'}\int_{c}^{d} F(\varphi, \chi, \psi)\Big[\varphi'_t(\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v) +$$

$$+ \varphi'_u(\psi'_t\chi'_v - \chi'_t\psi'_v) + \varphi'_v(\psi'_u\chi'_t - \psi'_t\chi'_u)\Big] dt\,.\,du\,.\,dv. \quad (3)$$

3.ª En cuanto á los límites, basta despejar $x, y, z$ de los dos sistemas:

1.er sistema. $a = \varphi(t, u, v)$ ; $a' = \chi(t, u, v)$ ; $a'' = \psi(t, u, v)$

2.º sistema. $b = \varphi(t, u, v)$ ; $b' = \chi(t, u, v)$ ; $b'' = \psi(t, u, v)$.

Los valores $t = c$; $u = c'$; $v = c''$ deducidos del 1.er sistema, forman los límites inferiores.

Los $t = d$; $u = d'$; $v = d''$ deducidos del 2.º, los límites superiores.

*Núm.* 71. *Aplicaciones.* 1.ª Supongamos la integral doble

$$U = \int_a^{a'} \int_b^{b'} F(x, y)\, dx,\, dy,$$

en la que $x, y$ representen dos coordenadas rectangulares de un punto del plano de las $[x, y]$, y supongamos que á estas coordenadas se trata de sustituir otras dos $t, u$ rectangulares tambien; tendremos

$$x = t \cos.\alpha - u \operatorname{sen}.\alpha$$

$$y = t \operatorname{sen}.\alpha + u \cos.\alpha;$$

y por lo tanto (*núm.* 68)

$$\varphi'_t = \cos.\alpha \;;\; \varphi'_u = -\operatorname{sen}.\alpha \;;\; \psi'_t = \operatorname{sen}.\alpha \;;\; \psi'_u = \cos.\alpha,$$

de donde

$$\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t = \cos.^2\alpha + \operatorname{sen}.^1\alpha = 1.$$

Así, pues,

$$U = \int_c^d \int_{c'}^{d'} F(t \cos.\alpha - u \operatorname{sen}.\alpha, t \operatorname{sen}.\alpha + u \cos.\alpha)\, du.\, dt.$$

De esta fórmula resulta que en el caso particular de que tratamos basta eliminar del coeficiente diferencial $F$, $x$ é $y$ en funcion de $u, t$, y sustituir á $dx, dy$ el producto $du, dt$.

*Núm.* 72. Fácilmente podia preveerse este resultado; en efecto, $F[x, y]$ representa una cierta magnitud, densidad, masa, temperatura, etc., correspondiente ó afecta al punto $x, y$; luego multiplicando por el elemento de *área* que se refiere á este punto sea cual fuere este elemento y su forma, la masa será la misma en todos los casos. Es tan sencilla esta idea, que creemos inútil explanarla.

*Núm.* 73. 2.ª Supongamos la integral triple

$$U=\int_a^{a'}\int_b^{b'}\int_c^{c'} F(x, y, z)\, dx, dy, dz,$$

en la que $x, y, z$ representan las tres coordenadas rectangulares de un punto del espacio, y supongamos que á estas tres coordenadas se desea sustituir otras tres coordenadas $t, u, v$, tambien rectangulares, enlazadas con las primeras por las relaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,t + b\,u + c\,v \\ y &= a'\,t + b'\,u + c'\,v \\ z &= a''\,t + b''\,u + c''\,v \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Aplicando la fórmula (3) del *núm.* 70 tendremos:

$$\varphi(t, u, v) = a\,t + b\,u + c\,v$$

$$\chi(t, u, v) = a'\,t + b'\,u + c'\,v$$

$$\psi(t, u, v) = a''t + b''u + c''v$$

de donde se deduce

$$\varphi'_t = a \;;\; \varphi'_u = b \;;\; \varphi'_v = c$$

$$\chi'_t = a' \;;\; \chi'_u = b' \;;\; \chi'_v = c'$$

$$\psi'_t = a'' ;\; \psi'_u = b'' ;\; \psi'_v = c''$$

y por lo tanto

$$\varphi'_t (\chi'_u \psi'_v - \chi'_v \psi'_u) + \varphi_u (\psi'_t \chi'_v - \psi'_v \chi'_t) + \varphi'_v (\chi'_t \psi'_u -$$

$$\chi'_u \psi'_t) = a (b' c'' - c' b'') + b (a'' c' - a' c'') + c (a' b'' - a'' b')$$

$$= ab' c'' - ac' b'' + ca' b'' - ba' c'' + bc' a'' - cb' a''$$

pero este es el denominador de los valores que se obtienen para $t$, $u$, $v$, en las ecuaciones (1), y como estos valores son:

$$\left.\begin{aligned} t &= ax + a'y + a''z \\ u &= bx + b'y + b''z \\ v &= cx + c'y + c''z \end{aligned}\right\}$$

resulta que dicho denominador es igual á la *unidad;* lo cual, por otra parte, se demuestra directamente recordando las relaciones que existen entre los nueve constantes.

Resultará en vista de lo dicho:

$$U = \int_d^{d'} \int_e^{e'} \int_f^{f'} F(at + bu + cv,\ a't + b'u + c'v,$$

$$a''t + b'u + c''u)\, dt \,.\, du \,.\, dv;$$

luego en el caso particular de que se trata, basta eliminar

$x$, $y$, $z$, del coeficiente $F$, y sustituir á $dx$, $dy$, $dz$, el producto $dt$, $du$, $dv$.

*Núm.* 73. Á esta misma consecuencia podria llegarse directamente por consideraciones análogas á las del *núm.* 72.

*Superficies polares recíprocas por relacion á una esfera* (*).

---

*Núm.* 74. *Relacion armónica.* Cuando cuatro puntos $a$, $b$, $c$, $d$ (*fig.* 21), están distribuidos sobre una recta $xx$ de modo que entre los segmentos

$$ca, \ cb, \ da, \ db,$$

contados con el signo que les corresponda segun la direccion que se considere como positiva en dicha recta $xx$, se verifica la relacion

$$\frac{ca}{cb} = -\frac{da}{db}, \qquad (1)$$

se dice que estos puntos están en relacion *armónica*, y á cada par de puntos $a$, $b$; $c$, $d$, se les dá el nombre de conjugados.

Representando por $a$, $c$, $b$, las tres distancias $da$, $dc$, $db$, tendremos

$$ca = a - c\,; \ cb = b - c\,; \ da = a\,; \ db = b;$$

y por lo tanto, la relacion armónica se convertirá en

$$\frac{a-c}{b-c} = -\frac{a}{b}$$

(*) Véase para mayor claridad mi *Tratado de Geometría superior*.

de donde

$$ab - cb = -ab + ac,$$

ó bien

$$2\,ab = cb + ca,$$

ó finalmente

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

que tambien puede presentarse bajo esta forma:

$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}. \qquad (2)$$

La ecuacion (2) define como la (1) la relacion armónica, y puede enunciarse diciendo que *la relacion inversa de la distancia de un punto al conjugado es igual á la semi-suma de las relaciones inversas del mismo punto á los otros dos.*

*Núm.* 75. Si cuatro puntos $a, b, c, d$ (*fig.* 22), en relacion armónica, se proyectan sobre otra recta $x'\,x'$, ó sobre un plano $p\,p$, las proyecciones $a', b', c', d'$, que evidentemente estarán en línea recta, forman, como los puntos dados, una relacion armónica.

En efecto, se sabe que

$$\frac{d'\,a'}{d\,a} = \frac{d'\,c'}{d\,c} = \frac{d'\,b'}{d\,b} = \text{constante} = m,$$

ó bien abreviadamente,

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \text{constante} = m,$$

de donde

$$a' = am;\; c' = cm;\; b' = bm. \qquad (3)$$

Puesto que los puntos $a, b, c, d$, están en relacion armónica, tendremos

$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2},$$

y dividiendo los dos miembros por $m$,

$$\frac{1}{cm} = \frac{\frac{1}{am} + \frac{1}{bm}}{2} \quad ó \quad \frac{1}{c'} = \frac{\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}}{2},$$

luego los puntos $a', b', c', d'$ tambien están en relacion armónica.

*Núm.* 76. *Generalizacion.* Supongamos que sobre la recta $xx$ (*fig.* 21) hay dos puntos $c, d$, y las abscisas $db = b$, $da = a$ de otros dos, contadas desde $d$ como origen, son espresiones imaginarias conjugadas

$$b = m - n\sqrt{-1};\quad a = m + n\sqrt{-1};$$

en este caso no existirán los puntos $a$ y $b$, pero por estension se dice que entre los dos puntos reales $c, d$, y los dos imaginarios, existe relacion armónica si se verifica

$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{m+n\sqrt{-1}} + \frac{1}{m-n\sqrt{-1}}}{2}.$$

Que ésta igualdad es posible siendo $c$ cantidad real es evidente, porque tendremos

$$\frac{1}{c}=\frac{m}{m^2+n^2},$$

ecuacion entre cantidades reales.

*Núm.* 77. *Polos y planos polares. Problema.* Sea $O$ (*figura* 23) una esfera de radio $r$, y $D$ un punto cualquiera interior ó esterior. Tracemos una secante $DA$; supongamos que corta á la esfera en dos puntos $A$, $B$, y determinemos el punto $C$ conjugado armónico con $D$. Es evidente que variando la secante variará el punto $C$, y se trata de determinar el lugar geométrico de dichos puntos.

***Resolucion.*** Tomemos $D$ como orígen de coordenadas; $DO$ por eje de las $z$, y $Dx$, $Dy$, perpendiculares á $Dz$ y entre sí, por ejes de las $x$ y de las $y$.

La ecuacion de la esfera, haciendo $DO=d$, será

$$x^2+y^2+(z-d)^2=r^2, \qquad (1)$$

y las ecuaciones de la secante arbitraria $DA$

$$x=az;\ y=bz, \qquad (2)$$

en las que $a$ y $b$ son dos constantes arbitrarias que determinan la posicion de la secante segun el valor que reciben.

Supongamos, por último, que $Da$ es la proyeccion sobre el plano $zx$ de dicha secante: $Db'$ y $Da'$ serán los valores de $z$ para los puntos de interseccion $B$, $A$.

Hagamos

$$Db'=z';\ Da'=z'';\ Dc'=z_1.$$

Para determinar los valores de $z'$ y $z''$ debemos eliminar $x$ é $y$, entre las ecuaciones (1) y (2), y tendremos

$$a^2z^2+b^2z^2+(z-d)^2=r^2,$$

ó bien

$$(a^2+b^2+1)z^2-2\,dz+d^2-r^2=0\,.$$

Las dos raices de esta ecuacion serán $z'$ y $z''$, pero hagamos $z=\dfrac{1}{\zeta}$.

La ecuacion resultante

$$\zeta^2-\frac{2\,d}{d^2-r^2}\zeta+\frac{a^2+d^2+1}{d^2-r^2}=0$$

tendrá por raices $\dfrac{1}{z'}$ y $\dfrac{1}{z''}$, y por lo tanto

$$\frac{1}{z'}+\frac{1}{z''}=\frac{2\,d}{d^2-r^2}.$$

Pero si los puntos $D, B, C, A$, están en relacion armónica tambien lo estarán (*núm.* 75) los $D, b', c', a'$; luego

$$\frac{1}{z_1}=\frac{\dfrac{1}{z'}+\dfrac{1}{z''}}{2},$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{z_1}=\frac{d}{d^2-r^2}\quad \text{ó bien}\quad z_1=d-\frac{r^2}{d}\,. \qquad (3)$$

De aquí se deduce esta consecuencia importante: que la $z^1$ es constante para todos los puntos del lugar geométrico, y que, por lo tanto, *dicho lugar geométrico es un plano perpen-*

*dicular á la recta OD trazado á la distancia* $d - \frac{r^2}{d}$ *del punto*

*D ó á la distancia* $\frac{r^2}{d}$ *del centro de la esfera.*

Al punto $D$ se le da el nombre de *polo*, al plano que hemos hallado el de *plano polar*, y vemos que el plano polar es perpendicular á la recta que une el polo al centro de la esfera, y su distancia $d'$ al centro está determinada por la relacion

$$d' = \frac{r^2}{d}.$$

*Núm.* 78. Puede tambien decirse que el *polo*, la *esfera* y el *plano polar* dividen armónicamente todos los secantes que pasan por el polo; y nótese que la definicion es general aunque la secante no corte á la esfera, porque si bien en estas hipótesis las dos raices de la ecuacion en $\zeta$ serán imaginarias, siempre subsistirá la relacion

$$\frac{1}{z'} + \frac{1}{z''} = \frac{2\,d}{d^2 - r^2},$$

y podremos aplicar lo expuesto en el *núm.* 76.

*Núm.* 79. Nada mas fácil que determinar el plano polar dado el polo, ó recíprocamente.

1.º Supongamos que el polo $D$ (*fig.* 24) es *esterior* á la esfera; trazando desde dicho punto una tangente $DT$, y bajando desde el punto de contacto $T$ un plano $PP$ perpendicular á $OD$, este será el plano polar. En efecto, si trazamos $TC$ perpendicular á $OD$, tendremos $OT^2 = OD \times OC$, ó bien $OC = \frac{R^2}{OD}$; luego $PP$ es el plano polar buscado (*núm.* 77).

2.º Si el polo $D$ es interior (*fig.* 25) basta hacer pasar por $OD$ un plano, levantar en $D$ una recta $DT$ perpendicular á

$OC$, y por el punto en que $T$ corta á la esfera trazar, siempre en dicho plano, $TC$ tangente á la circunferencia interseccion del plano secante y de la esfera.

Trazando por $C$ un plano $PP$ perpendicular á $OC$, obtendremos el plano polar.

Por construcciones análogas hallaríamos el polo dado al plano polar.

*Núm.* 80. *Problema.* Sea (*fig.* 26)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

la ecuacion de una esfera, y

$$x \cos. \alpha + y \cos. \beta + z \cos. \gamma - p = 0$$

la ecuacion de un plano $PP$ que dista $p$ del origen, y cuya normal forma con los ejes ángulos $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Se trata de determinar las tres coordenadas $x_1$, $y_1$, $z_1$, del polo.

*Resolucion.* Bajemos $OA$ perpendicular sobre $PP$, y determinemos en esta recta el punto $B$ de modo que se tenga

$$OB = \frac{r^2}{OA} = \frac{r^2}{p}.$$

El punto $B$ será el polo buscado, y sus coordenadas serán

$$x_1 = OB \cos. \alpha \ ; \ y_1 = OB \cos. \beta \ ; \ z_1 = OB \cos. \gamma,$$

ó bien

$$x_1 = \frac{r^2}{p} \cos. \alpha \ ; \ y_1 = \frac{r^2}{p} \cos. \beta \ ; \ z_1 = \frac{r^2}{p} \cos. \gamma. \quad (4)$$

Estas ecuaciones pueden aún escribirse bajo la forma

$$\frac{x_1}{\cos.\alpha}=\frac{y_1}{\cos.\beta}=\frac{z_1}{\cos.\gamma}=\frac{r^2}{p}.\quad(4')$$

*Núm.* 81. *Observaciones.* 1.ª Si el rádio de la esfera es igual á 1, podrán escribirse las ecuaciones anteriores bajo esta forma:

$$\frac{x_1}{\cos.\alpha}=\frac{y_1}{\cos.\beta}=\frac{z_1}{\cos.\gamma}=\frac{1}{p}.$$

2.ª Si la ecuacion del plano tiene la forma general

$$ax+by+cz-d=0,$$

á las ecuaciones (4') deberán sustituirse estas otras:

$$\frac{x_1}{a}=\frac{y_1}{b}=\frac{z_1}{c}=\frac{r^2}{d}.$$

En efecto, se sabe que

$$\cos.\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ \cos.\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

$$\cos.\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

y que la distancia $p$ del origen al plano está dada por la fórmula

$$\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

y sustituyendo estos valores en (4'), resultará:

$$\frac{\frac{x_1}{a}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\frac{y_1}{b}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\frac{z_1}{c}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\frac{r^2}{d}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

ó bien suprimiendo el radical

$$\frac{x_1}{a} = \frac{y_1}{b} = \frac{z_1}{c} = \frac{r^2}{d}.$$

*Núm.* 82. Supongamos que por un punto $A$ pasan tres planos $AP$, $AP'$, $AP''$, y determinemos, respecto á una esféra $O$, los tres polos correspondientes $p$, $p'$, $p''$.

Si por el punto $A$ y por cada uno de los tres polos hacemos pasar tres secantes $Ap$, $Ap'$, $Ap''$, es evidente que la secante $Ap$ quedará dividida por el plano $AP$, la esfera y el punto $p$ en relacion armónica, y otro tanto podremos decir de las secantes $Ap'$, $Ap''$. Resultan, pues, tres secantes que parten de un punto $A$, y que en los puntos $p$, $p'$, $p''$, quedan divididas armónicamente. De aquí se deduce que el plano $QQ''$ que pasa por dichos tres puntos, es el plano polar del punto $A$ por relacion á la esfera. Queda, pues, demostrado el siguiente

*Teorema.* Cuando tres planos pasan por un punto $A$, el plano que determina los tres polos es plano polar de dicho punto.

*Núm.* 83. *Superficies polares recíprocas.* Imaginemos que las cuatro constantes $a$, $b$, $c$, $d$, de un plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

dependen de dos parámetros variables $\alpha$, $\beta$, de suerte que la ecuacion anterior es de la forma

$$f(\alpha, \beta)\, x + f_1(\alpha, \beta)\, y + f_2(\alpha, \beta)\, z + f_3(\alpha, \beta) = 0.$$

A cada sistema de valores $\alpha$, $\beta$, corresponde un plano, y la *envolvente* de todos ellos es, segun se sabe, una superficie $S$, cuya ecuacion se obtiene eliminando $\alpha$, $\beta$, entre las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} ax + by + cz + d = 0 \\[2ex] \dfrac{da}{d\alpha} x + \dfrac{db}{d\alpha} y + \dfrac{dc}{d\alpha} z + \dfrac{dd}{d\alpha} = 0 \\[2ex] \dfrac{da}{d\beta} x + \dfrac{db}{d\beta} + \dfrac{dc}{d\beta} + \dfrac{dd}{d\beta} = 0 \end{array}\right\}$$

Supongamos tres sistemas de valores para $\alpha$, $\beta$:

$$\alpha_1\ ,\ \beta_1$$

$$\alpha_2\ ,\ \beta_2$$

$$\alpha_3\ ,\ \beta_3$$

infinitamente próximos, y obtendremos tres planos $AP$, $AP'$, $AP''$ (*fig.* 27), infinitamente próximos tambien, á los que corresponderán, por relacion á una esfera $O$, tres polos $p$, $p'$, $p''$, formando un triángulo infinitamente pequeño. Pero á medida que $\alpha_1$, $\beta_1$; $\alpha_2$, $\beta_2$; $\alpha_3$, $\beta_3$.... tienden á ser iguales, el punto $A$ se aproxima á su límite, es decir, se aproxima hácia la superficie $S$; los planos $P$, $P'$, $P''$, tienden á confundirse en uno solo $T$ tangente en $A$ á dicha superficie $S$; los tres puntos $p$, $p'$ $p''$, se reunen tambien en uno solo $a$ (*fig.* 27 *bis*), que será el polo del plano $T$, punto que es el límite de los puntos $p, p', p''$; y por último, el plano $QQ''$ (*fig.* 27) toma una posicion límite $t$ (*fig.* 27 *bis*).

Vemos, pues, que á cada punto $A$ de la superficie $S$ corresponde un punto $a$, que será el polo de su plano tangente $T$; y el lugar geométrico de los puntos $a$ es otra segunda superficie $s$, que se llama *superficie polar* de la envolvente $S$.

*La superficie polar de una superficie dada S por relacion á nna esfera, es por lo tanto el lugar geométrico de los polos de todos los planos tangentes á la primera S.*

*Núm.* 84. Notemos ahora que el plano $t$ es el límite del $QQ''$, el cual contenia tres puntos infinitamente próximos $p, p', p''$, que tendian á confundirse en uno solo $a$, perteneciente á la superficie, de aquí resulta que este plano $t$ es tangente á la superficie polar $s$; y como el polo de $t$ es el punto $A$ de la superficie $S$, resulta que los puntos de esta son los polos de los planos tangentes de $s$, es decir, que $S$ es la superficie polar de $s$; ó de otro modo, que las superficies $S$ y $s$ son polares recíprocas.

Fácil sería demostrar estas proposiciones de una manera rigorosa y analítica, pero creemos inútil para nuestro objeto entrar en mas desarrollos.

*Núm.* 85. Sea $A$ un punto de la superficie $S$ y $T$ el plano tangente en dicho punto: sea asimismo $a$ el punto de $s$ correspondiente al $A$ y $t$ el plano tangente en $a$ de $s$.

Segun lo demostrado $a$ será el polo de $T$, y $A$ el polo de $t$: así (*núm.* 77) la recta $Oa$ será perpendicular á $T$, y $OA$ perpendicular á $t$; además tendremos

$$Oa \times OP = r^2 \; ; \; OA \times op = r^2.$$

Estas relaciones geométricas y analíticas son muy notables, y de ellas haremos uso en la teoría de la luz.

### *Area de la elipse indicatriz.*

*Núm.* 86. Sea $M$ (*fig.* 28) un punto de una superficie convexa $S$; $OM$ la normal de dicho punto; $Ms$ una cantidad muy pequeña $\delta$; y $AB$ el plano de la elipse indicatriz.

Se sabe que el área del casquete $AMA'$ tiende á ser igual á la de la elipse, es decir,

$$\text{límite} \frac{\text{área casquete } AMA'}{\text{área elipse } ABA'} = 1 ;$$

pero si $sA$ y $sB$ son los semi-ejes de la elipse, se tiene

$$\text{área elipse } ABA' = \pi \,.\, sA \,.\, sB;$$

luego, salvas cantidades infinitamente pequeñas de órden superior,

$$\text{área casquete } AMA' = \pi \,.\, sA \,.\, sB.$$

Ahora bien:

$$\text{lím.} \frac{sA}{AM} = 1 \quad \text{y} \quad \text{lím.} \frac{sB}{MB} = 1 ;$$

por lo tanto:

$$\text{área casquete } AMA' = \pi \,.\, MA \,.\, MB.$$

Por último, representando por $R$ y $R'$ los dos rádios principales de curvatura, se tiene aproximadamente

$$MA^2 = 2R \times \delta; \quad MB^2 = 2R' \times \delta;$$

luego, finalmente,

$$\text{área casquete } AMA' = 2\pi\delta\sqrt{RR'} .$$

## *Raices de ecuaciones fraccionarias.*

(Cauchy, *Teoría de la luz*. Memoria litografiada; agosto, 1836.)

*Núm.* 87. Sea la ecuacion

$$\frac{a^2}{x-L}+\frac{b^2}{x-M}+\frac{c^2}{x-N}-P=0\,; \qquad (1)$$

en la que $x$ es la incógnita; $a^2$, $b^2$, $c^2$ tres cantidades esencialmente positivas; y $L$, $M$, $N$, $P$ cuatro cantidades cualesquiera.

Nos proponemos demostrar que la ecuacion (1) tiene sus tres raices reales, y aun determinar los límites en que se hallan encerradas.

Examinaremos á este fin dos casos.

1.$^{er}$ *Caso.* $P>0$. Supongamos, para fijar las ideas, que el órden de magnitud de las tres cantidades $L$, $M$, $N$ es el siguiente:

$$L<M<N,$$

y sustituyamos en vez de $x$ las cantidades

$$L+i\,;\; M-i\,;\; M+i\,;\; N-i\,;\; N+i\,;\; +\infty\,;$$

en las que $i$ es una variable infinitamente pequeña.

La sustitucion $x=+\infty$ anula los tres primeros términos, y reduce la ecuacion á $-P$; luego tendremos:

Sustitucion de $x=+\infty$ ..... resultado *negativo*.

Poniendo en segundo lugar $x = L + i$, es decir, en vez de $x$, un valor infinitamente próximo á $L$, pero superior, resultará

$$\frac{a^2}{i} + \frac{b^2}{L - M + i} + \frac{c^2}{L - N + i} - P.$$

Los tres últimos términos son cantidades finitas, y el primero es tan grande como se quiera, puesto que $i$ entra en el denominador; luego el signo del resultado dependerá del de este primer término, y como es positivo, tendremos:

Sustitucion de $x = L + i$.... resultado *positivo.*

Pongamos $x = M - i$ y veremos como precedente que la expresion

$$\frac{a^2}{M - L - i} + \frac{b^2}{-i} + \frac{c^2}{M - N - i} - P,$$

es necesariamente negativa; así:

Sustitucion de $x = M - i$..... resultado *negativo.*

Análogamente veremos que

Sustitucion $x = M + i$.... resultado *positivo.*

Sustitucion $x = N - i$.... resultado *negativo.*

Sustitucion $x = N + i$.... resultado *positivo.*

Podremos, en resúmen, formar el siguiente cuadro:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Cantidades que se sustituyen en vez de x....* | $L+i$ | $M-i$ | $M+i$ | $N-i$ | $N+i$ | $+\infty$ |
| *Signos del resultado...* | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

De aquí se deduce inmediatamente que la ecuacion tiene sus tres raices reales:

*una* entre....... $L+i$ y $M-i$ ó bien entre $L$ y $M$,

*otra* entre...... $M+i$ y $N-i$ ó bien entre $M$ y $N$,

*otra* tercera entre $N$ é $\infty$.

2.° *Caso.* $P<0$. Por un procedimiento análogo al anterior tendremos:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Cantidades que se sustituyen á $x$.........* | $-\infty$ | $L-i$ | $L+i$ | $M-i$ | $M+i$ | $N-i$ |
| *Signos del resultado...* | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

de donde se deduce que la ecuacion tiene *tres raices* reales:

*una* entre...... $-\infty$ y $L$,

*otra* entre....... $L$ y $M$,

*otra* tercera entre $M$ y $N$.

*Observacion importante.* Parece á primera vista que las raices reales son en mayor número, estando otras dos comprendidas entre $M-i$ y $M+i$, y $N-i$, $N+i$, ó $L-i$, $L+i$, cantidades que dan resultados de signos contrarios; pero nótese que si la ecuacion cambia de signo al pasar $x$ de $M-i$ á $M+i$, por ejemplo, esto procede no del paso por *cero*, sino del paso por infinito para el valor $x=M$, lo cual no sucede en los tres intérvalos de las tres raices finitas.

De aquí se deduce inmediatamente que la ecuacion tiene sus tres raices reales:

*una entre*. . . . . . $L+\varepsilon$ y $M-\varepsilon$ ó bien entre $L$ y $M$

*otra entre*. . . . . . $M+\varepsilon$ y $N-\varepsilon$ ó bien entre $M$ y $N$.

*otra tercera* entre $N$ é $\infty$.

**2.° Caso.** $R<0$. Por un procedimiento análogo al anterior tendremos:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Cantidades que se sustituyen á x* | $-\infty$ | $L-\varepsilon$ | $L+\varepsilon$ | $M-\varepsilon$ | $M+\varepsilon$ | $N-\varepsilon$ |
| *Signos del resultado*. . | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

de donde se deduce que la ecuacion tiene *tres raices reales*:

*una entre*. . . . . . $-\infty$ y $L$.

*otra entre*. . . . . . $L$ y $M$.

*otra tercera* entre $M$ y $N$.

*Observacion importante.* Parece á primera vista que las raices reales son en mayor número, estando otras dos comprendidas entre $M-\varepsilon$ y $M+\varepsilon$, y $N-\varepsilon$, $N+\varepsilon$, ó $L-\varepsilon$, $L+\varepsilon$, cantidades que dan resultados de signos contrarios; pero nótese que si la ecuacion cambia de signo al pasar $x$ de $M-\varepsilon$ a $M+\varepsilon$, por ejemplo, esto procede no del paso por cero, sino del paso por infinito para el valor $x=M$, lo cual no sucede en los tres intervalos de las tres raices finitas.

## INDICE DE LA INTRODUCCION.