$$\mathcal{E}\frac{B' s e^{st}}{S} - M\mathcal{E}\frac{B e^{st}}{S} - P\mathcal{E}\frac{C e^{st}}{S} - R\mathcal{E}\frac{A e^{st}}{S} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\frac{C' s e^{st}}{S} - N\mathcal{E}\frac{C e^{st}}{S} - Q\mathcal{E}\frac{A e^{st}}{S} - R\mathcal{E}\frac{B e^{st}}{S} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\frac{A s e^{st}}{S} - \mathcal{E}\frac{A' e^{st}}{S} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\frac{B s e^{st}}{S} - \mathcal{E}\frac{B' e^{st}}{S} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\frac{C s e^{st}}{S} - \mathcal{E}\frac{C' e^{st}}{S} = o.$$

Pasando las constantes bajo el signo $\mathcal{E}$, y recordando que la suma algebráica de los resíduos es igual al resíduo de la suma, obtendremos

$$\mathcal{E}\frac{(sA' - AL - BR - QC)e^{st}}{S} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\frac{(sB' - BM - CP - AR)e^{st}}{S} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\frac{(sC' - CN - AQ - BR)e^{st}}{S} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\frac{(sA-A')e^{st}}{S}=o\ ;\quad \mathcal{E}\frac{(sB-B')e^{st}}{S}=o\ ;$$

$$\mathcal{E}\frac{(sC-C')e^{st}}{S}=o$$

ó en virtud de las ecuaciones (5)

$$\mathcal{E}\frac{\alpha' Se^{st}}{S}=o\ ;\quad \mathcal{E}\frac{\beta' Se^{st}}{S}=o\ ;\quad \mathcal{E}\frac{\gamma' Se^{st}}{S}=o\ ;$$

$$\mathcal{E}\frac{\alpha\, Se^{st}}{S}=o\ ;\quad \mathcal{E}\frac{\beta\, Se^{st}}{S}=o\ ;\quad \mathcal{E}\frac{\gamma\, Se^{st}}{S}=o$$

ecuaciones idénticas, segun hemos demostrado en otros casos análogos.

Además, si hacemos $t=o$ en (8), sustituyendo por

$$A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C'$$

sus valores resultará

$$\xi_0=\mathcal{E}\frac{L_1(\alpha'+\alpha s)+R_1(\beta'+\beta s)+Q_1(\gamma'+\gamma s)}{S}\ ;$$

$$\eta_0=\mathcal{E}\frac{R_1(\alpha'+\alpha s)+M_1(\beta'+\beta s)+P_1(\gamma'+\gamma s)}{S}\ ;$$

$$\zeta_0 = \mathcal{E}\,\frac{Q_1(\alpha'+\alpha s)+P_1(\beta'+\beta s)+N_1(\gamma'+\gamma s)}{S}\;;$$

$$\xi'_0 = \mathcal{E}\,\frac{L_1 s\alpha'+(L_1 s^2-S)\alpha+R_1(s\beta'+s^2\beta)+Q_1(s\gamma'+s^2\gamma)}{S}\;;$$

$$\eta'_0 = \mathcal{E}\,\frac{M_1 s\beta'+(M_1 s^2-S)\beta+P_1(s\gamma'+s^2\gamma)+R_1(s\alpha'+s^2\alpha)}{S}\;;$$

$$\zeta'_0 = \mathcal{E}\,\frac{N_1 s\gamma'+(N_1 s^2-S)\gamma+Q_1(s\alpha'+s^2\alpha)+P_1(s\beta'+s^2\beta)}{S}\,.$$

Respecto á los tres primeros valores notaremos que S es de *sexto grado* en s y los numeradores de *quinto*, puesto que L_1, M_1 y N_1 son de *cuarto grado*, y P_1, Q_1, R_1 de *segundo;* por consiguiente los resíduos totales serán los coeficientes α, β, γ de las quintas potencias (*Núm.* 39): es decir,

$$\xi_0=\alpha\;;\quad \eta_0=\beta\;;\quad \zeta_0=\gamma.$$

En cuanto á los tres valores últimos, prescindiendo de los términos

$$-\mathcal{E}\,\frac{S\alpha}{S}\;;\quad -\mathcal{E}\,\frac{S\beta}{S}\;;\quad -\mathcal{E}\,\frac{S\gamma}{S}$$

que son evidentemente nulos, las partes restantes son tambien quebrados, cuyo denominador es de *sexto* grado y de *quinto* el numerador, siendo además α', β', γ' los coeficientes de las quintas potencias. Por lo tanto

$$\xi'_0=\alpha' \; ; \; \eta'_0=\beta' \; ; \; \zeta'_0=\gamma'.$$

Núm. 50. Nótese, que si en los valores de ξ', η', ζ' (8) se prescinde de los términos αS, βS, γS, cuyos resíduos totales son en efecto nulos, los numeradores son las derivadas con relacion á t de ξ, η, γ, como debia ser.

Basta para convencerse de ello observar que A', B', C', aparte de los términos en S, son los resultados de multiplicar por s los valores de A, B, C, que es la operacion á que se reduce la derivacion de los valores de ξ, η, ζ.

Núm. 51. Puesto que los valores (6') de

$$L_1,\; M_1,\; N_1,\; P_1,\; Q_1,\; R_1 \text{ y los de } A,\; B,\; C$$

en funcion de estas cantidades tienen la misma forma que los del ejemplo anterior, sin más diferencia que la sustitucion de s^2 á s, y de

$$\alpha'+s\alpha,\; \beta'+s\beta,\; \gamma'+s\gamma \text{ á } \alpha,\; \beta,\; \gamma,$$

resulta que con igual modificacion tendremos relaciones análogas á las del número 46, es decir

$$L_1=\frac{SP+Q_1R_1}{P_1} \; ; \quad M_1=\frac{SQ+P_1R_1}{Q_1},$$

$$N_1=\frac{SR+P_1Q_1}{R_1}.$$

Sustituyendo estas espresiones en ξ, η, ζ, y suprimiendo el término que contiene S en el numerador, por ser nulo el resíduo total correspondiente, tendremos

$$\xi = \mathcal{E}\frac{\Theta e^{st}}{P_1(S)}\ ;\quad \eta = \mathcal{E}\frac{\Theta e^{st}}{Q_1(S)}\ ;\quad \zeta = \mathcal{E}\frac{\Theta e^{st}}{R_1(S)}$$

siendo

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta = Q_1 R_1(\alpha' + s\alpha) + P_1 R_1(\beta' + s\beta) + P_1 Q_1(\gamma' + s\gamma);\\
&P_1 = P(s^2 - L) + QR;\\
&Q_1 = Q(s^2 - M) + PR;\\
&R_1 = R(s^2 - N) + PQ;
\end{aligned}\right\}\quad (9')$$

y advirtiendo que los resíduos totales se toman por relacion á las tres raices de $S = o$, ó bien

$$(s^2 - L)(s^2 - M)(s^2 - N) - P^2(s^2 - L) - Q^2(s^2 - M)$$

$$-Q^2(s^2 - N) - 2PQR = o.$$

Por último, esta simplificacion no será aplicable si alguna de las raices de $S = o$ anula á P_1, Q_1 ó R_1.

Núm. 52. Nada más fácil que dar á ξ, η, ζ la forma ordinaria suprimiendo la operacion $\mathcal{E}$: bastaría sustituir en las fórmulas del número 48 por s, s^2 y por

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \alpha' + s\alpha,\ \beta' + s\beta,\ \gamma' + s\gamma.$$

Núm. 53. *Cuarto ejemplo. Integracion de ecuaciones diferenciales lineales*, de diferencias parciales y coeficientes constantes.

Supongamos tres ecuaciones diferenciales lineales, con tres funciones, ξ, η, ζ, y cuatro variables independientes, x, y, z, t; y sea

$$\left.\begin{array}{l} D_t^2\xi + A\,\xi \\ +B\,\eta \\ +C\,\zeta \end{array}\right| \begin{array}{l} +A' D_x\xi + A_1' D_y\xi + A_2' D_z\xi \\ +B' D_x\eta + B_1' D_y\eta + B_2' D_z\eta \\ +C' D_x\zeta + C_1' D_y\zeta + C_2' D_z\zeta \end{array} \left| \begin{array}{l} +A'' D_x^2\xi + A_1'' D_y^2\xi \\ +B'' D_x^2\eta + B_1'' D_y^2\eta \\ +C'' D_x^2\zeta + C_1'' D_y^2\zeta \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} +A_2'' D_z^2\xi + A_3'' D_{xy}^2\xi + A_4'' D_{xz}^2\xi + A_5'' D_{yz}^2\xi \\ +B_2'' D_z^2\eta + B_3'' D_{xy}\eta + B_4'' D_{xz}^2\eta + B_5'' D_{yz}\xi \\ +C_2'' D_z^2\zeta + C_3'' D_{xy}^2\zeta + C_4'' D_{xz}^2\zeta + C_5'' D_{yz}\zeta \end{array}\right| + \ldots\ldots = o \qquad (1)$$

una de estas tres ecuaciones, en la que los coeficientes A..... B..... C..... son todos constantes; advirtiendo que una forma análoga tendrán las otras dos ecuaciones.

Núm. 54. Observemos ante todo que la sustitucion en la ecuacion (1) de ξ, por ejemplo, por una esponencial

$$\xi = e^{r + ux + vy + wz}$$

en la que r, u, v, w son constantes, equivale á la sustitucion de los símbolos

$$D_x,\ D_y,\ D_z;\ D_x^2,\ D_y^2,\ D_z^2,\ D_{xy}^2,\ D_{xz}^2,\ D_{yz}^2\ldots.$$

por

$$u,\ v,\ w,\ u^2,\ v^2,\ w^2,\ uv,\ uw,\ vw\ldots..$$

y en general á la de

$$D_{x,\,y,\,z}^{m+n+p},\ \text{por}\ u^m.\ v^n.\ w^p.$$

En efecto, se tiene evidentemente

$$D_{x,\,y,\,z}^{m+n+p}\ \xi = D_{x,\,y,\,z}^{m+n+p}\ e^{r+ux+vy+wz}$$

$$= u^m . v^n . w^p e^{r + ux + vy + wz} = u^m . v^n . w^p \xi .$$

Otro tanto podemos decir de η y ζ.

Si la exponencial estuviese multiplicada por una constante K. es decir, si fuese

$$\xi = K e^{r + ux + vy + wz}$$

los resultados serían idénticos.

Núm. 55. Si en cada una de las líneas horizontales de la ecuacion (1) se sacan simbólicamente como factores comunes, ξ en la primera, η en la segunda, ζ en la tercera, resultará:

$$(1') \quad \left.\begin{array}{l} \Big[D_t^2 + A + A' D_x + A_1' D_y + A_2' D_z + A'' D_x^2 \\ \quad + A_1'' D_y^2 + A_2'' D_z^2 + A_3'' D^2_{xy} + A_4'' D^2_{xz} \\ \quad + A_5'' D^2_{yz} + \ldots\ldots \Big] \xi \\ + \Big[B + B' D_x + B_1' D_y + B_2' D_z + B'' D_x^2 + \\ \quad B_1'' D_y^2 + B_2'' D_z^2 + B_3'' D^2_{xy} + B_4'' D^2_{xz} + \\ \quad B_5'' D^2_{yz} + \ldots\ldots \Big] \eta \\ + \Big[C + C' D_x + C_1' D_y + C_2' D_z + C'' D_x^2 + \\ \quad C_1'' D_y^2 + {}_2'' D_z^2 + C_3'' D^2_{xy} + C_4'' D_{xz}^2 + \\ \quad C_5'' D^2_{xz} + \ldots\ldots \Big] \zeta \end{array} \right\} = o.$$

Para simplificar representemos por

$$-L\,,\ -R \text{ y } -Q,$$

la expresion comprendida en el primer paréntesis á escepcion de D_t^2, y las comprendidas en el segundo y tercero; y tendremos que la ecuacion simbólica (1') podrá escribirse de este modo

$$(D_t^2-L)\,\xi-R\eta-Q\zeta=o. \qquad (1'')$$

Pero entiéndase que el producto $(D_t^2-L)\,\xi$ es puramente simbólico, y que las expresiones L, R y Q son puros símbolos y en manera alguna cantidades. Así es que para que la ecuacion (1'') tenga un sentido algebráico es preciso efectuar productos y considerar á

$$D_x\xi\,,\ D_y\xi\,,\ D_z\xi\ldots.$$

con relacion á x, y, z, t como tales derivadas.

Segun lo expuesto en el número anterior nada más facil que obtener el resultado de sustituir en la ecuacion (1'') por ξ, η y ζ las exponenciales

$$\xi=Ke^{r+ux+vy+wz}\,;\quad \eta=K'e^{r+ux+vy+wz}\,;$$

$$\zeta=K''e^{r+ux+vy+wz}\,.$$

En efecto, basta para ello sustituir en los símbolos L, R y Q por

$$D_x,\ D_y,\ D_z,\ D_x^2\ldots..\,;\quad u,\ v,\ w,\ u^2\ldots..$$

con lo cual la expresion (1'') se convertirá, representando por L', R', Q' el resultado de dicha sustitucion en L, R, Q en

$$(D_t^2 - L')\xi - R'\eta - Q'\zeta = o.$$

Adviértase que el producto de D_t^2 por ξ continua siendo simbólico, pero no lo son, sino verdaderos productos, los de L' por ξ, R' por η y Q' por ζ; y en efecto L', R' y Q' no son ya símbolos sino verdaderas cantidades funciones de u, v y w, es decir,

$$L' = A + A'u + A'_1 v + A'_2 w + A'' u^2 + A_1'' v^2 + A_2'' w^2 +$$
$$A_3'' uv + A_4'' uw + A_5'' vw + \ldots\ldots$$

$$M' = B + B'u + B'_1 v + B'_2 w + B'' u^2 + B_1'' v^2 + B_2'' w^2 +$$
$$B_3'' uv + B_4'' uw + B_5'' vw + \ldots\ldots$$

$$N' = C + C'u + C'_1 v + C_2'' w + C'' u^2 + C_1'' v^2 + C_2'' w^2 +$$
$$C_3'' uv + C_4'' uw + C_5'' vw + \ldots\ldots$$

Núm. 56. En adelante, para abreviar, diremos que L, M, N *son funciones* de

$$D_x,\ D_y,\ D_z,\ D_x^2,\ D_y^2,\ D_z^2 \ldots\ldots$$

pero esto significará solamente que son *expresiones simbólicas* de $D_x \ldots\ldots$

Véase, sin embargo, cuanto se simplifican y se acortan los cálculos por la introduccion de las operaciones simbólicas y como se pasa con rapidez suma de estas expresiones á las algebráicas reales.

Núm. 57. Supongamos finalmente que sometiendo á iguales transformaciones simbólicas las dos ecuaciones restantes se pueden poner bajo la forma

$$\left.\begin{aligned}(D_t^2 - M)\eta - P\zeta - R\xi &= o;\\ (D_t^2 - N)\zeta - Q\xi - P\eta &= o.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

En estas ecuaciones

$$M, N, P, Q, R,$$

son expresiones simbólicas de

$$D_x, D_y, D_z, D_x^2 \ldots\ldots$$

y las *ecuaciones particulares* que como ejemplo presentamos son de tal naturaleza, que las mismas funciones simbólicas P, Q, R, se repiten en cierto orden en las tres ecuaciones, (1″) y (2). Así en la segunda $P\zeta$ indica una cierta funcion de las derivadas de ζ con relacion á x, y, z y esta misma funcion $P\eta$ aparece en la tercera. Compréndase sin embargo que si la P de la *segunda* es igual bajo forma simbólica á la P de la tercera, no puede decirse con verdad que son iguales como cantidades porque ni una ni otra son tales cantidades: representan puros símbolos y nada mas: indican iguales operaciones sobre ζ que sobre η; pero las verdaderas cantidades son $P\zeta$ y $P\eta$ y estas no son en general iguales.

Núm. 58. En resúmen, sean la tres ecuaciones diferenciales propuestas, escritas simbólicamente

$$\left.\begin{aligned}(D_t^2 - L)\xi - R\eta - Q\zeta &= o;\\ (D_t^2 - M)\eta - P\zeta - R\xi &= o;\\ (D_t^2 - N)\zeta - Q\xi - P\eta &= o.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Se trata de determinar tres funciones, ξ, η, ζ de x, y, z, tales que verifiquen á las ecuaciones (3) y que para $t=o$ satisfagan á las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} \xi_0=\varphi(x, y, z)\ ;\quad \eta_0=\chi(x, y, z)\ ;\quad \zeta_0=\psi(x, y, z) \\ D_t\xi=\varphi_1(x, y, z)\ ;\ D_t\eta=\chi_1(x, y, z)\ ;\ D_t\zeta_0=\psi_1(x, y, z). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Núm. 59. Nada más fácil que encontrar infinitas soluciones particulares de las ecuaciones (3).

Basta igualar ξ, η, ζ á tres cantidades proporcionales á una misma exponencial:

$$\left.\begin{array}{l} \xi=A\,\xi_1 e^{ux+vy+wz+r} \\ \eta=B\,\eta_1 e^{ux+vy+wz+r} \\ \zeta=C\,\zeta_1 e^{ux+vx+wz+r} \end{array}\right\} \quad (5)$$

en la que ξ_1, η_1, ζ_1 sean funciones de t é independientes de x, y, z.

En efecto, segun lo demostrado en el número 54 la sustitucion de estos valores en las ecuaciones (3), dará despues de dividir por la exponencial

$$e^{ux+vy+wz+r}$$

$$\left.\begin{array}{l} D_t^2\xi_1-L'\xi_1-R'\eta_1-Q\zeta_1=o\ ; \\ D_t^2\eta_1-M'\eta_1-P'\zeta_1-R\,\xi_1=o\ ; \\ D_t^2\zeta_1-N'\zeta_1-Q'\xi_1-P\eta_1=o\ ; \end{array}\right\} \quad (6)$$

siendo ξ_1, η_1 y ζ_1 funciones t, y

$$L', M', N', P', Q', R'$$

las cantidades que resultan de sustituir en los símbolos

$$L, M, N, P, Q, R,$$

en vez de

$$D_x, D_y, D_z \ldots\ldots u, v, w \ldots\ldots$$

Ahora bien, las ecuaciones (6) son ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de una sola variable independiente, es decir, ecuaciones en *diferenciales parciales*, luego basta determinar ξ_1, η_1, ζ_1 por los métodos del (*Núm.* 49) y sustituir en los valores (5).

De este modo obtendremos tantas integrales particulares como queramos por la indeterminacion de la constante A y de las cantidades u, v, w, r, y sumándolas hallaremos aun nuevas integrales. Todas satisfarán á las ecuaciones diferenciales (3), pero todavía no á las condiciones iniciales (4).

Núm. 60. Veamos cómo se resuelve esta última parte del problema.

Demos infinitos valores á A y á u, v, w, r: tendremos espresados los valores de ξ, η, ζ por las séries

$$\xi = Ae^{ux+vy+wz+r} \times e^{st} + A'e^{u'x+v'y+w'z+r'} \times e^{s't} +$$

$$A''e^{u''x+v''y+w''z+r''} \times e^{s''t} + \ldots\ldots$$

$$\eta = Be^{ux+vy+wz+r} \times e^{st} + B'e^{u'x+v'y+w'z+r'} \times e^{s't} +$$

$$B''e^{u''x+v''y+w''z+r''} \times e^{s''t} + \ldots\ldots$$

$$\zeta = Ce^{ux+vy+wz+r} \times e^{st} + C'e^{u'x+v'y+w'z+r'} \times e^{s't} +$$

$$C''e^{u''x+v''y+w''y+r''} \times e^{s''t} + \ldots\ldots$$

en las que B, C y s se determinarán en funcion de A, u, v, w, r por los métodos expuestos en el tercer ejemplo.

La ley de variacion de A y de u, v, w, r es todavía arbitraria, y de esta indeterminacion debemos servirnos para cumplir con las condiciones (4).

Para $t = o$ debemos tener

$$\varphi(x, y, z) = Ae^{ux+vy+wz} + A'e^{u'x+v'y+w'z} + \ldots\ldots ;$$

$$\varphi_1(x, y, z) = Ase^{vx+vy+wz} + A's'e^{u'x+v'y+w'z} + \ldots\ldots$$

$$\chi(x, y, z) = Be^{ux+vy+wz} + B'e^{u'x+v'y+wz} + \ldots\ldots ;$$

$$\chi_1(x, y, z) = Bse^{ux+vy+wz} + B's'e^{u'x+v'y+w'z} + \ldots\ldots$$

$$\psi(x, y, z) = Ce^{ux+vy+wz} + C'e^{u'x+v'y+w'z} + \ldots\ldots ;$$

$$\psi_1(x, y, z) = Cse^{ux+vy+wz} + C's'e^{u'x+v'y+w'z} + \ldots\ldots$$

pero los segundos miembros no son otra cosa que el desarrollo de

$$\varphi,\ \chi,\ \psi,\ \varphi_1,\ \chi_1,\ \psi_1$$

en séries trigonométricas, desarrollos que en general se efectuan por la fórmula de Fourier; luego esto nos da desde luego la idea de que tal ha de ser la forma que afecten los valores generales de ξ, η y ζ, toda vez que los últimos desarrollos son el resultado de hacer $t=o$ en la primera, y de diferenciarlos y suponer despues $t=o$ en las derivadas.

Aún pudiéramos seguir más adelante en este método analítico; pero á fin de abreviar acudiremos desde luego al método sintético, exponiendo la elegante y sencillísima solucion de Cauchy.

Núm. 61. En vez de suponer ξ, η, ζ expresados por cantidades proporcionales á una misma esponencial, igualemos cada una de estas variables á una suma infinita de exponenciales segun la fórmula de Fourier (*Núm.* 34):

$$\varphi(x,y,z,t)=\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}}\ \varphi(\alpha,\beta,\gamma,t)\,\frac{d\alpha\,du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\,dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\,dw}{2\pi}$$

$$\eta(x,y,z,t)=\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)\right.}$$

$$+w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1}\quad \eta(\alpha,\beta,\gamma,t)\frac{d\alpha.du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta.dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma.dw}{2\pi}$$

$$\zeta(x,y,z,t)=\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\Big[u(x-\alpha)+v(y-\beta)}$$

$$+w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1}\quad \zeta(\alpha,\beta,\gamma,t)\frac{d\alpha.du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta.dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\, dw}{2\pi}$$

ó abreviadamente, representando por ξ_1, η_1, ζ_1 los resultados de sustituir

$$x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma,$$

en ξ, η, ζ, es decir,

$$\xi\alpha,\beta,\gamma,t)=\xi_1\ ;\quad \eta(\alpha,\beta,\gamma,t)=\eta_1\ ;\quad \zeta(\alpha,\beta,\gamma,t)=\zeta_1,$$

$$\xi=\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\Big[u(x-\alpha)+v(y-\beta)}$$

$$+w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1}\quad \xi_1\frac{d\alpha.du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\, dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\, dw}{2\pi}\ ;$$

$$\eta = \int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} \eta_1 \frac{d\alpha . du}{2\pi} . \frac{d\beta\, dv}{2\pi} . \frac{d\gamma\, dw}{2\pi} ; \quad (7)$$

$$\zeta = \int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} \zeta_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} . \frac{d\beta\, dv}{2\pi} . \frac{d\gamma\, dw}{2\pi} .$$

Para sustituir estos valores en las ecuaciones (3), necesitamos obtener dos clases de términos: *primero*, las segundas derivadas de ξ, η, ζ; *segundo*, las expresiones simbólicas

$$L\,\xi,\ R\,\eta,\ Q\,\zeta \ldots\ldots$$

Presentemos de cada uno de estos términos un ejemplo, y fácil será generalizar para los restantes.

I. *Determinaciones de* $D_t^2\,\xi$. Sabemos que cuando los límites son constantes pueden invertirse los signos $\int$ y D, luego resulta

$$D_t^2\xi = D_t^2\left[\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}}\ \xi_1 \frac{d\alpha.du}{2\pi}.\frac{d\beta.dv}{2\pi}.\frac{d\gamma.dw}{2\pi}\right]$$

y

$$D_t^2\xi = \overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}}\ D_t^2\xi\frac{d\alpha\, du}{2\pi}.\frac{d\beta\, dv}{2\pi}.\frac{d\gamma\, dw}{2\pi}$$

puesto que bajo las integrales el único factor que contiene t es ξ_1.

II. *Determinacion de* $L\xi$. Sabemos que $L\xi$ se compone (*Núm.* 55) de una série de términos, cada uno de los cuales es en general de la forma

$$AD_{x,\,y,\,z}^{m+n+p}\xi,$$

siendo A una constante; luego $L\xi$ se convertirá, al poner por ξ su valor, en una série de términos de esta forma

$$\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} AD_{x,\,y,\,z}^{m+n+p}\left[e^{[u(x-\alpha)+v(y-\beta)}\right.$$

$$+w(z-\gamma)]\sqrt{-1}\Big]\,\xi_1\,\frac{d\alpha\,du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\,dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\,dw}{2\pi}$$

en razon á que solo en la exponencial entran las variables x, y, z; ó bien efectuando la operacion $D^{m+n+p}_{x,y,z}$

$$\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} A v^m u^n w^p e^{\Big[u(x-\alpha)+v(y-\beta)}$$

$$+w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1}\;\xi_1\,\frac{d\alpha\,du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\,dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\,dw}{2\pi}.$$

Haciendo esta misma sustitucion del valor de ξ en todos los demás términos de $L\,\xi$, reuniendo todas las integrales en una, y sacando por factor comun

$$e^{\Big[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1}}\;\xi_1\,\frac{d\alpha\,du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\,dv}{2\pi}\cdot$$

$$\frac{d\gamma\,dw}{2\pi},$$

tendrémos para la transformacion de $L\,\xi$

$$L\xi = \int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[A + A'u' + A'_1 v + A'_2 w +$$

$$A'' u^2 + A_1'' v^2 + A''_2 w^2 + A_3'' u v + A_4'' u w + A_5'' v w + \ldots\ldots\Big]$$

$$e^{\big[u(x-\alpha) + v(y-\beta) + w(z-\gamma)\big]\sqrt{-1}} \xi_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot$$

$$\frac{d\gamma\, dw}{2\pi}.$$

Pero el primer paréntesis de la integral no es otra cosa que el resultado de sustituir en el símbolo L á D_x, D_y, D_z..... las cantidades u, v, w..... de suerte que representando por L' este resultado tendremos: transformacion de

$$L\xi = \int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\big[u(x-\alpha) + v(y-\beta)}$$

$$^{+ w(z-\gamma)\big]\sqrt{-1}} L'\xi_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi}.$$

Núm. 62. En resúmen, sustituyendo en la primera de las ecuaciones (3) por ξ, η y ζ sus valores, obtendremos

$$\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\big[u(x-\alpha) + v(y-\beta) +}$$

$$w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1}\; D^2{}_t\,\xi_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\, dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\, dw}{2\pi} -$$

$$\overline{\int\int\int\int\int\int}{}_{-\infty}^{+\infty} e^{\Big[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1}}\; L'\,\xi_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\, dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\, dw}{2\pi} -$$

$$\overline{\int\int\int\int\int\int}{}_{-\infty}^{+\infty} e^{\Big[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1}}\; R'\,\eta_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\, dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\, dw}{2\pi} -$$

$$\overline{\int\int\int\int\int\int}{}_{-\infty}^{+\infty} e^{\Big[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1}}\; Q'\,\zeta_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\, dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\, dw}{2\pi} = o.$$

Reuniendo todos los términos en una integral, y dentro de ella sacando la esponencial y las diferenciales como factores comunes, obtendremos la primera de las tres ecuaciones siguientes, siendo las dos últimas las transformadas de las correspondientes del sistema (3)

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} \left[(D_t^2-L')\xi_1-R'\eta_1-Q_1\zeta_1\right] \dfrac{d\alpha.du}{2\pi}\cdot\dfrac{d\beta.dv}{2\pi}\cdot\dfrac{d\gamma\, dw}{2\pi}=o;\\[2ex]
\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} \left[(D_t^2-M')\eta_1-P'\zeta_1-R'\xi_1\right] \dfrac{d\alpha\, du}{2\pi}\cdot\dfrac{d\beta\, dv}{2\pi}\cdot\dfrac{d\gamma\, dw}{2\pi}=o;\\[2ex]
\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)\right.}
\end{array}\right\}(8)$$

$$+ w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Big[(D_t^2-N')\zeta_1 - Q'\xi_1 - P'\eta_1\Big] \\ \\ \dfrac{d\alpha.du}{2\pi}\cdot\dfrac{d\beta\,dv}{2\pi}\cdot\dfrac{d\gamma.dw}{2\pi} = o.\end{array}\right\}(8)$$

Núm. 63. Fijemos las ideas antes de pasar adelante.

1.° Los valores de ξ, η, ζ del número 61 no son en rigor mas que sumas de esponenciales; pero estas entran en número infinito.

2.° Las variables α, β, γ, u, v, w desaparecen en las integraciones, y por lo tanto los segundos miembros no son en rigor mas que funciones de x, y, z, t.

3.° La forma de estas funciones depende de las que toman ξ_1, η_1, ζ_1, y por consiguiente la sustitucion de los valores de ξ, η, ζ en las ecuaciones diferenciales equivale á un cambio de variables: á las ξ, η, ζ sustituimos ξ_1, η_1, ζ_1.

4.° Las ecuaciones (8) espresan estas sustituciones, y de aquí se deduce que para que los valores (7) sean las integrales generales de las ecuaciones diferenciales propuestas, es necesario que se verifiquen dichas ecuaciones (8).

Núm. 64. Para que las ecuaciones (8) se verifiquen es *suficiente* (no decimos *necesario* porque basta con lo primero), que todos los elementos de las integrales sean nulos, es decir, que se tenga

$$\left.\begin{array}{l}(D_t^2-L')\xi_1 - R'\eta_1 - Q'\zeta_1 = o; \\ \\ (D_t^2-M')\eta_1 - P'\zeta_1 - R'\xi_1 = o; \\ \\ (D_t^2-N')\zeta_1 - Q'\xi_1 - P'\eta_1 = o.\end{array}\right\}\quad(9)$$

Estas ecuaciones diferenciales solo contienen la variable independiente t; P', Q', R', L', M', N' son constantes; ξ_1, η_1, ζ_1 son funciones de t; luego basta integrar dichas ecuaciones, y los valores que obtengamos para ξ_1, η_1, ζ_1 sustituidos en (7) nos darán valores para ξ, ζ, η, capaces de satisfacer á las ecuaciones diferenciales.

Pero esto no basta: es preciso no solo que los valores de ξ, η, ζ satisfagan á tres ecuaciones (3) sino tambien á las condiciones iniciales; es decir, que para $t=o$ se tenga

$$\left.\begin{array}{l} \xi=\varphi(x,y,z);\quad \eta=\chi(x,y,z);\quad \zeta=\psi(x,y,z) \\ \xi'=\varphi_1(x,y,z);\quad \eta'=\chi_1(x,y,z);\quad \zeta'=\psi_1(x,y,z). \end{array}\right\} \quad (10)$$

Basta para esto que los valores ξ_1, η_1, ζ_1 deducidos de la ecuacion (9) para $t=o$ tomen la forma,

$$\begin{array}{l} \xi_1=\varphi(\alpha,\beta,\gamma);\quad \eta_1=\chi(\alpha,\beta,\gamma);\quad \zeta_1=\varphi(\alpha,\beta,\gamma); \\ \xi_1'=\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma);\quad \eta_1'=\chi_1(\alpha,\beta,\gamma);\quad \zeta_1'=\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma). \end{array} \quad (10')$$

En efecto, en este caso los valores de ξ, η, ζ (7) se reducen segun la fórmula de Fourier á los del grupo (10). Por ejemplo, se tiene para $t=o$

$$\xi=\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}}\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\frac{d\alpha\, du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\, dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma . dw}{2\pi}=$$

$$\varphi(x,y,z),$$

y

$$\xi'=\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+\right.}$$

$$w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1} \qquad \xi'_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma . dw}{2\pi} =$$

$$\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\Big[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+}$$

$$w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1} \qquad \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi} =$$

$$\varphi_1(x, y, z).$$

En resúmen, tenemos que integrar las ecuaciones (9) determinando ξ_1, ζ_1, η_1 para $t=o$ por las condiciones (10). Este es precisamente el caso del ejemplo III, con la diferencia de que lo que allí eran α, β, γ, α', β', γ' son aquí

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma);\ \chi(\alpha, \beta, \gamma);\ \psi(\alpha, \beta, \gamma);\ \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma);$$
$$\chi_1(\alpha, \beta, \gamma);\ \psi_1(\alpha, \beta, \gamma).$$

Tendremos pues

$$\xi_1 = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{P_1(S)} \quad ; \quad \eta_1 = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{Q_1(S)} \quad ; \quad \zeta_1 = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{R_1(S)}$$

siendo

$$S=(s^2-L')(s^2-M')(s^2-N')-P'^2(s^2-L')-Q'^2(s^2-M')-$$
$$R'^2(s^2-N')-2\,P'\,Q'\,R';$$

$$P_1=P'(s^2-L')+Q'\,R';\quad Q_1=Q'(s^2-M')+P'\,R';$$

$$R_1=R'(s^2-N')+P'\,Q';$$

y

$$\Theta = Q_1 R_1 \Big[\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma) + s\varphi(\alpha,\beta,\gamma) \Big] + R_1 P_1 \Big[\chi_1(\alpha,\beta,\gamma) +$$

$$s\chi(\alpha,\beta,\gamma) \Big] + P_1 Q_1 \Big[\psi_1(\alpha,\beta,\gamma) + s\psi(\alpha,\beta,\gamma) \Big]$$

Sustituyendo estos valores en las espresiones (7) tendremos por último

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2^3\pi^3} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{E}^{\Theta e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}+st}}}{Q_1(S)} \\
&\qquad d\alpha \,.\, d\beta \,.\, d\gamma \,.\, du \,.\, dv \,.\, dw; \\
\eta &= \frac{1}{2^3\pi^3} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{E}^{\Theta e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}+st}}}{Q_1(S)} \\
&\qquad d\alpha \,.\, d\beta \,.\, d\gamma \,.\, du \,.\, dv \,.\, dw; \\
\zeta &= \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{E}^{\Theta e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}+st}}}{R_1(S)} \\
&\qquad d\alpha \,.\, d\beta \,.\, d\gamma \,.\, du \,.\, dv \,.\, dw.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

El órden de las operaciones para determinar ξ, η, ζ en cada caso es el siguiente:

1.° Hallar las seis raices s de S.

2.° Tomar el resíduo total de

$$\frac{\Theta\, e^{st}}{P_1(S)}\cdots\cdots$$

por relacion á estas raices.

3.° Tomar las integrales séxtuplas.

La indeterminacion de s habrá desaparecido al tomar el resíduo, entrando en lugar de esta variable las raices de (S) de cierto modo; y asimismo al tomar la integral sextupla, desaparecen las seis variables u, v, w, α, β, γ, quedando tan solo en el segundo miembro una funcion de x, y, z, t.

Las variables s, α, β, γ, u, v, w entran pues para indicar el modo de formacion de los valores de ξ, η, ζ, y al llegar al último resultado han desaparecido por completo.

Tal es el método de Mr. Cauchy, tan elegante y sobre todo tan sencillo, tan sencillo como lo presenta la dificultad del problema.

Núm. 65. No olvidemos que las funciones

$$\varphi,\ \chi,\ \psi,\ \varphi_1,\ \chi_1,\ \psi_1$$

pueden ser contínuas ó discontínuas: pueden, por ejemplo, tener valores finitos dentro de una cierta envolvente, y ser nulas fuera de ella, pero siempre finitas.

Esta observacion es muy importante para las aplicaciones.

CAPITULO III.

Cambio de variables.—Superficies polares recíprocas.—Elipse indicatriz.—Raices de ecuaciones fraccionarias.

Cambio de variables bajo el signo integral en las integrales múltiples. (Cálculo de Mr. Moigno, t. II, pág. 214.)

Núm. 66. El problema del cambio de variables bajo el signo integral en las integrales múltiples ha sido resuelto por Jacobi, Catalan y Cauchy; mas para nuestro objeto nos basta estudiar el caso particular de dos y de tres variables, cuestion tratada por Euler en 1769 y por Lagrange en 1773.

Integrales dobles. Sea la integral doble

$$U=\int_{a}^{a_1}\int_{f(x)}^{f_1(x)} F(x,\, y)\, dx\, dy,$$

en la que x, y son dos variables independientes, y en la que suponemos que se ha de integrar: 1.º con relacion á y, razon por la cual los primeros límites son funciones de x; 2.º respecto á x, de suerte que los límites de esta segunda integracion son constantes. Sin embargo, para las aplicaciones que hemos de hacer podemos suponer el caso particular de cuatro límites constantes.

Supongamos que á las variables x, y queremos sustituir bajo el signo integral otras dos variables u, t, ligadas á las primeras por las relaciones

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x,\, y,\, u,\, t)=o\\ \psi(x,\, y,\, u,\, t)=o\end{array}\right\}$$