$$\xi = Ae^{s_2 t},$$

$$\eta = \frac{R}{s_2 - M} Ae^{s_2 t}.$$

Por último, dando á la constante A dos valores arbitrarios A_1 y A_2 y sumando los resultados, tendremos las integrales generales del sistema (1)

$$\xi = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\eta = \frac{R}{s_1 - M} A_1 e^{s_1 t} + \frac{R}{s_2 - M} A_2 e^{s_2 t}$$

Solo resta determinar A_1 y A_2, de manera que para $t = o$, ξ y η tomen los valores α y β: tendremos pues las ecuaciones de condicion

$$\alpha = A_1 + A_2$$

$$\beta = \frac{R}{s_1 - M} A_1 + \frac{R}{s_2 - M} A_2,$$

de las que se deduce

$$A_1 = \frac{\alpha R - \beta (s_2 - M)}{R(s_1 - s_2)} (s_1 - M)$$

$$A_2 = \frac{\alpha R - \beta (s_1 - M)}{R(s_2 - s_1)} (s_2 - M)$$

y como segun las ecuaciones (5)

$$(s_1 - M)(s_2 - M) = -R^2,$$

resulta:

$$A_1 = \frac{\alpha(s_1 - M) + \beta R}{s_1 - s_2},$$

$$A_2 = \frac{\alpha(s_2 - M) + \beta R}{s_2 - s_1},$$

de suerte que las integrales que cumplen con todas las condiciones del problema serán

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha(s_1 - M) + \beta R}{s_1 - s_2}\, e^{s_1 t} + \frac{\alpha(s_2 - M) + \beta R}{s_2 - s_1}\, e^{s_2 t} \\ \eta &= \frac{R}{s_1 - M}\, \frac{\alpha(s_1 - M) + \beta R}{s_1 - s_2}\, e^{s_1 t} \\ &\quad + \frac{R}{s_2 - M}\, \frac{\alpha(s_2 - M) + \beta R}{s_2 - s_1}\, e^{s_2 t} \end{aligned}\right\}$$

Por último, el valor de η puede aún trasformarse observando que

$$(s_1 - L)(s_1 - M) = R^2,$$

y

$$(s_2 - L)(s_2 - M) = R^2,$$

puesto que s_1 y s_2 son raices de la ecuacion (4); y tendremos

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{\alpha(s_1-M)+\beta R}{s_1-s_2}\, e^{s_1 t} + \frac{\alpha(s_2-M)+\beta R}{s_2-s_1}\, e^{s_2 t}\\ \eta &= \frac{\alpha R+\beta(s_1-L)}{s_1-s_2}\, e^{s_1 t} + \frac{\alpha R+\beta(s_2-L)}{s_2-s_1}\, e^{s_2 t}\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Núm. 43. *Interpretacion de las ecuaciones* (6). Desde luego se ve que el valor de ξ es el resíduo total con relacion á s de la espresion

$$\frac{\alpha(s-M)+\beta R}{(s-s_1)(s-s_2)}\, e^{st}.$$

En efecto, tendremos que hallar primero el resíduo con relacion á la raiz s_1 del denominador, y para ello, dando al valor precedente la forma

$$\frac{\dfrac{\alpha(s-M)+\beta R}{s-s_2}\, e^{st}}{s-s_1},$$

y desarrollando el numerador por la fórmula de Taylor, hallaremos

$$\frac{\left(\dfrac{\alpha(s_1-M)+\beta R}{s_1-s_2}\, e^{s_1 t}\right) + \left(\dfrac{\alpha(s-M)+\beta R}{s-s_2}\right)'_{s=s_1} \dfrac{s-s_1}{1} + \ldots\ldots}{s-s_1}$$

de donde resulta que

$$\frac{\alpha(s_1-M)+\beta R}{s_1-s_2}\,e^{s_1 t}$$

será el resíduo parcial con relacion á la raiz.

Del mismo modo el resíduo con relacion á s_2 será

$$\frac{\alpha(s_2-M)+\beta R}{s_2-s_1}\,e^{s_2 t},$$

y por lo tanto el resíduo total será

$$\mathcal{E}\,\frac{\alpha(s-M)+\beta R}{(s-s_1)(s-s_2)}\,e^{st}=\frac{\alpha(s_1-M)+\beta R}{s_1-s_2}\,e^{s_1 s}$$

$$+\frac{\alpha(s_2-M)+\beta R}{s_2-s_1}\,e^{s_2 t}.$$

Dedúcese de esto, que el valor de ξ puede espresarse abreviadamente por la notacion

$$\xi=\mathcal{E}\,\frac{\alpha(s-M)+\beta R}{(s-s_1)(s-s_2)}\,e^{st};$$

y del mismo modo (7)

$$\eta=\mathcal{E}\,\frac{\beta(s-L)+\alpha R}{(s-s_1)(s-s_2)}\,e^{st}.$$

Todavía es posible dar forma más sencilla á estos valores. En primer lugar observaremos que

$$(s-s_1)(s-s_2)$$

no es otra cosa que el primer miembro de la ecuacion (4), es decir,

$$(s-L)(s-M)-R^2,$$

espresion que para simplificar representaremos por S.

En cuanto á los numeradores, observando que las ecuaciones (3) pueden sustituirse por estas otras

$$\left.\begin{aligned}(s-L)A-RB&=\alpha S,\\(s-M)B-RA&=\beta S,\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

toda vez que S es nula para los dos valores de s, tendremos, despejando A y B,

$$A=\alpha(s-M)+\beta R,$$

$$B=\beta(s-L)+\alpha R;$$

de suerte que

$$\xi=\mathcal{E}\frac{A}{S}e^{st};\quad \eta=\mathcal{E}\frac{B}{S}e^{st}.\quad(9)$$

Núm. **44.** Puede demostrarse directamente que las expresiones (7) ó (9) satisfacen á las ecuaciones diferenciales dadas,

$$D_t\xi - L\xi - R\eta = o,$$

$$D_t\eta - R\xi - M\eta = o.$$

En efecto, diferenciando los valores (9) con relacion á t, y recordando (*Núm.* 41) que la derivada de un resíduo es el resíduo de la derivada, tendremos

$$D_t\xi = \mathcal{E}\frac{As}{S}e^{st}\ ; \qquad D_t\eta = \mathcal{E}\frac{Bs}{S}e^{st}\ ; \qquad (9')$$

y sustituyendo en las ecuaciones diferenciales los valores (9) y (9')

$$\mathcal{E}\frac{As}{S}e^{st} - L\,\mathcal{E}\frac{A}{S}e^{st} - R\,\mathcal{E}\frac{B}{S}e^{st} = o\ ;$$

$$\mathcal{E}\frac{Bs}{S}e^{st} - R\,\mathcal{E}\frac{A}{S}e^{st} - M\,\mathcal{E}\frac{B}{S}e^{st} = o.$$

Pero el resíduo de una suma de funciones que tengan el mismo denominador es igual á la suma de los resíduos, y por otra parte, las constantes pueden pasar dentro del signo $\mathcal{E}$; luego las dos ecuaciones precedentes pueden escribirse así

$$\mathcal{E}\frac{A(s-L)-BR}{S}e^{st} = o,$$

$$\mathcal{E}\frac{B(s-M)-AR}{S}e^{st} = o,$$

ó bien

$$\mathcal{E}\frac{\alpha S e^{st}}{S} = o,$$

$$\mathcal{E}\frac{\beta S e^{st}}{S} = o;$$

ó por último

$$\mathcal{E}\alpha e^{st} = o\ ; \quad \mathcal{E}\beta e^{st} = o.$$

Pero estas espresiones son evidentemente nulas, puesto que los resíduos parciales con relacion á s_1 y s_2 lo son. Y en efecto, el término del desarrollo de

$$\alpha e^{st} = \frac{\alpha (s - s_1) e^{st}}{s - s_1}$$

que tiene $s - s_1$ por denominador es

$$\frac{(s_1 - s_1) e^{s_1 t}}{s - s_1}$$

término que es nulo, como tambien

$$\frac{(s_2 - s_2) e^{s_2 t}}{s - s_1}.$$

Dedúcese de aquí, que los valores (9) satisfacen á las ecuaciones diferenciales.

Además, si en los valores (7) hacemos $t=o$ resultará

$$\underset{o}{\xi}=\mathcal{E}\frac{\alpha(s-M)+\beta R}{(s-s_1)(s-s_2)}; \quad \underset{o}{\eta}=\mathcal{E}\frac{\beta(s-L)+\alpha R}{(s-s_1)(s-s_2)}.$$

Pero el numerador es de primer grado y el denominador de segundo, luego el resíduo total es el coeficiente de s, es decir

$$\xi_0=\alpha \text{ y } \eta_0=\beta.$$

En resúmen, las espresiones (9) cumplen con las dos condiciones generales que hemos indicado en el número 42, á saber, satisfacer á las ecuaciones diferenciales y para $t=o$ tomar los valores α y β.

Núm. 45. *Segundo ejemplo.* Sean tres ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, con tres funciones ξ, η, ζ y una variable independiente t:

$$\begin{aligned} D_t\xi&=L\xi+R\eta+Q\zeta, \\ D_t\eta&=R\xi+M\eta+P\zeta, \qquad (1) \\ D_t\zeta&=Q\xi+P\eta+N\zeta. \end{aligned}$$

ó bien bajo forma simbólica

$$\begin{aligned} (D_t-L)\xi-R\eta-Q\zeta&=o, \\ (D_t-M)\eta-P\zeta-R\xi&=o, \qquad (1') \\ (D_t-N)\zeta-Q\xi-P\eta&=o. \end{aligned}$$

$$L,\ M,\ N,\ P,\ Q,\ R$$

son constantes, y se trata de determinar ξ, η y ζ en funcion de t, de modo: *primero*, que satisfagan á las ecuaciones diferenciales (1) ó (1'); *segundo*, que para $t=o$ se reduzcan á

$$\xi=\alpha\ ;\ \eta=\beta\ ;\ \zeta=\gamma.$$

Pudiéramos, como en el ejemplo anterior, seguir un métomo directo é interpretar con arreglo á la teoría de los resíduos la fórmula final, pero es mas sencillo acudir al segundo método.

Sustituyendo los valores particulares

$$\xi=Ae^{st}\ ;\ \eta=Be^{st}\ ;\ \zeta=Ce^{st}$$

en las ecuaciones (1) ó (1'); tendremos las ecuaciones de condicion

$$\left.\begin{array}{l}(s-L)A-RB-QC=o,\\(s-M)B-PC-RA=o,\\(s-N)C-QA-PB=o.\end{array}\right\}\quad(2)$$

que determinan inmediatamente la iucógnita s y las relaciones

$$\frac{B}{A},\ \frac{C}{A};$$

despejando estas últimas entre las dos primeras ecuaciones, por ejemplo, y sustituyendo en la tercera, obtendremos la ecuacion de tercer grado en s

$$(s-L)(s-M)(s-N)-(s-L)P^2-PQR-(s-N)$$
$$R^2-PQR-(s-M)Q^2=o$$

ó bien

$$(s-L)(s-M)(s-N)-(s-L)P^2-(s-M)Q^2-(s-N)$$

$$R^2-2PQR=o. \qquad (3)$$

Esta ecuacion no es otra cosa que la determinante del sistema (2). De ella se deducen tres valores para s, á saber, s', s'', s''', á cada uno de los que corresponde un sistema de valores

$$\frac{B'}{A'}, \frac{C'}{A'}; \frac{B''}{A''}, \frac{C''}{A''}; \frac{B'''}{A'''}, \frac{C'''}{A'''},$$

para las relaciones

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A},$$

y por lo tanto un sistema de integrales particulares. La suma de estas constituirá la integral general, y determinando A', A'' y A''' por las condiciones

$$\xi_0=\alpha\ ;\ \eta_0=\beta\ ;\ \zeta_0=\gamma$$

quedará completamente resuelto el problema.

Representando por S la determinante (3), es claro que las ecuaciones (λ) pueden escribirse bajo la forma

$$\begin{aligned} (s-L)A-RB-QC&=\alpha S;\\ (s-M)B-PC-RA&=\beta S; \qquad (2')\\ (s-N)C-QA-PB&=\gamma S;\end{aligned}$$

y despejando de aquí A, B y C tendremos:

$$A=\frac{\alpha S\left[(s-M)(s-N)-P^2\right]+\beta S\left[R(s-N)+PQ\right]}{S}$$

$$+\frac{\gamma S\left[Q(s-M)+PR\right]}{S};$$

$$B=\frac{\alpha S\left[(s-N)R+PQ\right]+\beta S\left[(s-L)(s-N)-Q^2\right]}{S}$$

$$+\frac{\gamma S\left[P(s-L)+QR\right]}{S};$$

$$C=\frac{\alpha S\left[Q(s-M)+RP\right]+\beta S\left[P(s-L)+QR\right]}{S}$$

$$+\frac{\gamma S\left[(s-L)(s-M)-R^2\right]}{S};$$

ó bien

$$A=\alpha\left[(s-M)(s-N)-P^2\right]+\beta\left[R(s-N)+PQ\right]$$

$$+\gamma\left[Q(s-M)+PR\right],$$

$$B = \alpha\Big[R(s-N)+PQ\Big]+\beta\Big[(s-L)(s-N)-Q^2\Big]$$

$$+\gamma\Big[P(s-L)+QR\Big],$$

$$C = \alpha\Big[Q(s-M)+PR\Big]+\beta\Big[P(s-L)+QR\Big]$$

$$+\gamma\Big[(s-L)(s-M)-R^2\Big].$$

Para todos estos cálculos conviene recordar las espresiones generales del álgebra

$$\frac{K(b'c''-c'b'')+K'(cb''-bc'')+K''(bc'-cb')}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''};$$

$$\frac{K(c'a''-a'c'')+K'(ac''-ca'')+K'(ca'-ac')}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''};$$

$$\frac{K(ab'-ba')+K'(ba''-ab'')+K''(ab'-ba')}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

y las equivalencias

$K=\alpha S$;	$K'=\beta S$;	$K''=\gamma S$;
$a=s-L$	$b=-R$	$c=-Q$
$a'=-R$	$b'=s-M$	$c'=-P$
$a''=-Q$	$b''=-P$	$c''=s-N$

Haciendo, para simplificar,

$$L_1 = (s-M)(s-N) - P^2 \quad ; \quad P_1 = P(s-L) + QR$$

$$M_1 = (s-L)(s-N) - Q^2 \quad ; \quad Q_1 = Q(s-M) + PR \qquad (4)$$

$$N_1 = (s-L)(s-M) - R^2 \quad ; \quad R_1 = R(s-N) + PQ$$

los valores de A, B, C podrán escribirse bajo la forma

$$A = L_1\alpha + R_1\beta + Q_1\gamma \, ;$$

$$B = R_1\alpha + M_1\beta + P_1\gamma \, ; \qquad (4')$$

$$C = Q_1\alpha + P_1\beta + N_1\gamma .$$

Esto dicho, podemos, por analogía con el ejemplo anterior, deducir que las espresiones

$$\xi = \mathcal{E}\,\frac{Ac^{st}}{S} \; ; \quad \eta = \mathcal{E}\,\frac{Bc^{st}}{S} \; ; \quad \zeta = \mathcal{E}\,\frac{Cc^{st}}{S} \qquad (5)$$

en las que A, B, C son funciones de s dadas por las fórmulas (4) y (4'); S otra funcion de s determinada por la fórmula (3); y en las que, por último, el signo $\mathcal{E}$ indica resíduo total tomado por relacion á las tres raices del denominador, cumplen con las dos condiciones precedentes expuestas, á saber: primero, satisfacer á las ecuaciones (1); segundo, reducirse para $t = o$ á

$$\xi = \alpha \, ; \quad \eta = \beta \, ; \quad \zeta = \gamma .$$

En efecto, diferenciando los valores (5) con relacion á t (*Núm.* 41), tendremos:

$$D_t\xi = \mathcal{E}\,\frac{Ase^{st}}{S}\;;\quad D_t\eta = \mathcal{E}\,\frac{Bse^{st}}{S}\;;\quad D_t\zeta = \mathcal{E}\,\frac{Cse^{st}}{S} \qquad (5')$$

y sustituyendo en (1) ó (1′) los valores (5) y (5′) resultará

$$\mathcal{E}\,\frac{Ase^{st}}{S} - L\,\mathcal{E}\,\frac{Ae^{st}}{S} - R\,\mathcal{E}\,\frac{Be^{st}}{S} - Q\,\mathcal{E}\,\frac{Ce^{st}}{S} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\,\frac{Bse^{st}}{S} - M\,\mathcal{E}\,\frac{Be^{st}}{S} - P\,\mathcal{E}\,\frac{Ce^{st}}{S} - R\,\mathcal{E}\,\frac{Ae^{st}}{S} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\,\frac{Cse^{st}}{S} - N\,\mathcal{E}\,\frac{Ce^{st}}{S} - Q\,\mathcal{E}\,\frac{Ae^{st}}{S} - P\,\mathcal{E}\,\frac{Be^{st}}{S} = o\,;$$

pero el resíduo de la suma es igual á la suma de los resíduos; luego tendremos

$$\mathcal{E}\,\frac{(s-L)\,A - RB - QC}{S}\,e^{st} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\,\frac{(s-M)\,B - PC - RA}{S}\,e^{st} = o\,;$$

$$\mathcal{E}\,\frac{(s-N)\,C - QA - PB}{S}\,e^{st} = o\,;$$

ó atendiendo á las ecuaciones (2′)

$$\mathcal{E}\frac{\alpha S}{S}e^{st}=o \quad ; \quad \mathcal{E}\frac{\beta S}{S}e^{st}=o \quad ; \quad \mathcal{E}\frac{\gamma S}{S}e^{st}=o.$$

que se reducen á

$$\mathcal{E}\alpha e^{st}=o \quad ; \quad \mathcal{E}\beta e^{st}=o \quad ; \quad \mathcal{E}\gamma e^{st}=o.$$

Estas últimas expresiones son idénticas, toda vez que los resíduos parciales con relacion á s_1, s_2 y s_3 son evidentemente nulos; y si aún quedára alguna duda, bastaría introducir como factor y divisor

$$s-s_1\,,\quad s-s_2\,,\quad \text{ó}\quad s-s_3.$$

Queda, pues, satisfecha la *primera de las condiciones generales*.

Además, haciendo $t=o$ en las expresiones (5), se obtiene

$$\xi_0=\mathcal{E}\frac{L_1\alpha+R_1\beta+Q_1\gamma}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}\;;$$

$$\eta_0=\mathcal{E}\frac{R_1\alpha+M_1\beta+P_1\gamma}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}\;;$$

$$\zeta_0=\mathcal{E}\frac{Q_1\alpha+P_1\beta+N_1\gamma}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$$

pero en el valor de ξ, por ejemplo, el coeficiente L_1 es de segundo grado en s, y los R_1, Q_1 de primero; luego el numerador es un trinomio en s de segundo grado, en que el coeficiente de s^2 es α: y como (*Núm.* 39) en este caso el resíduo total es igual á α, resulta

$$\xi_0 = \alpha.$$

Análogamento probaríamos que

$$\eta_0 = \beta \text{ ; y } \zeta_0 = \gamma.$$

Núm. 46. *Simplificaciones.* Se pueden reducir en general á tres los seis polinomios en s,

$$L_1,\ M_1,\ N_1,\ P_1,\ Q_1,\ R_1.$$

En efecto, se tiene sucesivamente

$$P_1 L_1 - Q_1 R_1 = \Big[P(s-L) + QR\Big]\Big[(s-M)(s-N) - P^2\Big]$$

$$-\Big[Q(s-M) + PR\Big]\Big[R(s-N) + PQ\Big];$$

$$P_1 L_1 - Q_1 R_1 = P(s-L)(s-M)(s-N) + QR(s-M)$$

$$(s-N) - P^3(s-L) - QR(s-M)(s-N) - PR^2(s-N)$$

$$-PQ^2(s-M) - P^2 QR;$$

$$P_1 L_1 - Q_1 R_1 = P\Big[(s-L)(s-M)(s-N) - P^2(s-L)$$

$$-Q^2(s-M) - R^2(s-N) - 2PQR\Big] = PS;$$

y por último

$$\frac{P_1 L_1 - Q_1 R_1}{P} = S.$$

Del mismo modo hallaríamos

$$\frac{Q_1 M_1 - P_1 R_1}{Q} = S\ ; \quad \frac{R_1 N_1 - Q_1 P_1}{R} = S.$$

De estas ecuaciones se deducen los valores de L_1, M_1 y N_1 en funcion de P_1, Q_1, R_1.

Tendremos pues

$$L_1 = \frac{SP + Q_1 R_1}{P_1}\ ; \quad M_1 = \frac{SQ + P_1 R_1}{Q_1}\ ;$$

$$N_1 = \frac{SR + P_1 Q_1}{R_1}\ ;$$

y sustituyendo en las ecuaciones (5), despues de haber puesto por A, B, C los valores (4'), resultará;

$$\xi = \mathcal{E}\, \frac{\frac{SP + Q_1 R_1}{P_1}\alpha + R_1\beta + Q_1\gamma}{S}\, e^{st}\ ;$$

$$\eta = \mathcal{E}\, \frac{\frac{SQ + P_1 R_1}{Q_1}\beta + R_1\alpha + P_1\gamma}{S}\, e^{st}\ ;$$

$$\zeta = \mathcal{E}\, \frac{\frac{SR + P_1 Q_1}{R_1}\gamma + Q_1\alpha + P_1\beta}{S}\, e^{st}\ ;$$

que simplificando se trasforman en

$$\xi = \mathcal{E}\,\frac{SP + Q_1 R_1 \alpha + P_1 R_1 \beta + P_1 Q_1 \gamma}{P_1(S)}\, e^{st} ;$$

$$\eta = \mathcal{E}\,\frac{SQ + Q_1 R_1 \alpha + P_1 R_1 \beta + P_1 Q_1 \gamma}{Q_1(S)}\, e^{st} ;$$

$$\zeta = \mathcal{E}\,\frac{SR + Q_1 R_1 \alpha + P_1 R_1 \beta + P_1 Q_1 \gamma}{R_1(S)}\, e^{st} ;$$

en cuyas expresiones ponemos S entre paréntesis para indicar que el resíduo total ha de tomarse respecto á las tres raices s_1, s_2, s_3 de S.

Observemos ahora:

1.º Que las partes

$$\mathcal{E}\,\frac{SP}{P_1(S)}\, e^{st} \; ; \quad \mathcal{E}\,\frac{SQ}{Q_1(S)}\, e^{st} \; ; \quad \mathcal{E}\,\frac{SR}{R_1(S)}\, e^{st}$$

son nulas.

En efecto, los resíduos parciales serán, por ejemplo, para la primera espresion los resultados (*Núm.* 43) de sustituir en

$$\frac{SP}{P_1(s-s_2)(s-s_3)}\, e^{st} \; ; \quad \frac{SP}{P_1(s-s_2)(s-s_3)}\, e^{st} \; ;$$

$$\frac{SP}{P_1(s-s_2)(s-s_3)}\, e^{st}$$

en vez de s, s_1, s_2, s_3; pero como estas son raices de S, dichas espresiones se anularán.

De aquí se deduce, que las primeras partes de los tres resíduos desaparecen.

2.° Que el polinomio

$$Q_1 R_1 \alpha + P_1 R_1 \beta + P_1 Q_1 \gamma$$

es el mismo para las tres variables ξ, η, ζ. Representándolo por Θ tendremos

$$\xi = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{P_1(S)} \; ; \quad \eta = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{Q_1(S)} \; ; \quad \zeta = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{R_1(S)} \, .$$

3.° Que el método anterior, es decir, la reduccion de los seis polinomios á tres, caeria en defecto si las raices de $S=o$ anulasen á alguno de los polinomios P_1, Q_1, R_1, puesto que en este caso las espresiones

$$\frac{SP}{P_1(s-s_2)(s-s_3)}, \text{ etc.},$$

se presentarian bajo forma indeterminada para $s=s_1$.

Núm. 47. En resúmen, los valores de ξ, η y ζ son de la forma

$$\xi = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{P_1(S)} \; ; \quad \eta = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{Q_1(S)} \; ; \quad \zeta = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{R_1(S)} \; ;$$

en los que se tiene:

$$\Theta = Q_1 R_1 \alpha + P_1 R_1 \beta + P_1 Q_1 \gamma;$$

$$P_1 = P(s-L) + QR;$$

$$Q_1 = Q(s-M) + PR;$$

$$R_1 = R(s-N) + PQ.$$

Los resíduos son totales y se refieren á las tres raices de

$$S = s-L)(s-M)(s-N) - P^2(s-L) - Q^2(s-M)$$
$$- R^2(s-N) - 2PQR = o.$$

Núm. 48. Nada mas fácil que reducir los valores de ξ, η, ζ á la forma ordinaria.

Representando por s_1, s_2, s_3 las tres raices de $S=o$, el valor de ξ puede ponerse bajo la forma

$$\xi = \mathcal{E}\frac{\left[Q(s-M)+PR\right]\left[R(s-N)+PQ\right]\alpha + \left[P(s-L)+QR\right]}{\left[P(s-L)+QR\right]\left[(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\right]}$$

$$\frac{\left[R(s-N)+PQ\right]\beta + \left[P(s-L)+QR\right]\left[Q(s-M)+PR\right]\gamma}{\left[P(s-L)+QR\right]\left[(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\right]}e^{st}$$

Representando por los subíndices s_1, s_2, s_3 los resíduos parciales, tendremos

$$\mathcal{E}_{s_1} = \frac{\left[Q(s_1-M)+PR\right]\left[R(s_1-N)+PQ\right]\alpha+\left[P(s_1-L)+QR\right]}{\left[P(s_1-L)+QR\right](s_1-s_2)(s_1-s_3)}$$

$$\frac{\left[R(s_1-N)+PQ\right]\beta+\left[P(s_1-L)+QR\right]\left[Q(s_1-M)+PR\right]\gamma}{\left[P(s_1-L)+QR\right](s_1-s_2)(s_1-s_3)} e^{s_1 t}$$

$$\mathcal{E}_{s_2} = \frac{\left[Q(s_2-M)+PR\right]\left[R(s_2-N)+PQ\right]\alpha+\left[P(s_2-L)+QR\right]}{\left[P(s_2-L)+QR\right](s_2-s_1)(s_2-s_3)}$$

$$\frac{\left[R(s_2-N)+PQ\right]\beta+\left[P(s_2-L)+QR\right]\left[Q(s_2-M)+PR\right]\gamma}{\left[P(s_2-L)+QR\right](s_2-s_1)(s_2-s_3)} e^{s_2 t}$$

$$\mathcal{E}_{s_3} = \frac{\left[Q(s_3-M)+PR\right]\left[R(s_3-N)+PQ\right]\alpha+\left[P(s_3-L)+QR\right]}{\left[P(s_3-L)+QR\right](s_3-s_1)(s_3-s_2)}$$

$$\frac{\left[R(s_3-N)+PQ\right]\beta+\left[P(s_3-L)+QR\right]\left[Q(s_3-M)+PR\right]\gamma}{\left[P(s_3-L)+QR\right](s_3-s_1)(s_3-s_2)} e^{s_3 t}$$

El valor de ξ será la suma de los tres valores precedentes, es decir:

$$\xi = \mathcal{E}_{s_1} + \mathcal{E}_{s_2} + \mathcal{E}_{s_3}.$$

Núm. 49. *Tercer ejemplo.* Sean las tres ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo órden y de coeficientes constantes,

$$\left.\begin{aligned} D_t^2\xi &= L\xi + R\eta + Q\zeta \\ D_t^2\eta &= M\eta + P\zeta + R\xi \\ D_t^2\zeta &= N\zeta + Q\xi + P\eta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ó puestas bajo forma simbólica

$$\left.\begin{aligned} (D_t^2 - L)\xi - R\eta - Q\zeta &= o \\ (D_t^2 - M)\eta - P\zeta - R\xi &= o \\ (D_t^2 - N)\zeta - Q\xi - P\eta &= o \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Se trata de determiaar ξ, η, ζ en funcion de t, de tal manera que:

Primero. Satisfagan estos valores á las ecuaciones (1) ó (1').

Y segundo. Que para $t = o$ se tenga

$$\xi_0 = \alpha\ ;\ \eta_0 = \beta\ ;\ \zeta_0 = \gamma\ ;\ \xi_0' = \alpha'\ ;\ \eta_0' = \beta'\ ;\ \zeta_0 = \gamma'.$$

Seguiremos para ello una marcha análoga á la ya expuesta, pero ante todo reduciremos las ecuaciones dadas á otras de primer órden, introduciendo las variables

$$D_t\xi = \xi' \ ; \ D_t\eta = \eta' \ ; \ D_t\zeta = \zeta' \ ;$$

y resultará

$$\left.\begin{aligned} &D_t\xi' - L\xi - R\eta - Q\zeta = o\,; \\ &D_t\eta' - M\eta - P\zeta - R\xi = o\,; \\ &D_t\zeta' - N\zeta - Q\xi - P\eta = o\,; \\ &D_t\xi - \xi' = o\,; \\ &D_t\eta - \eta' = o\,; \\ &D_t\zeta - \zeta' = o\,; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Se trata ahora de determinar seis funciones de t, á saber:

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \xi',\ \eta',\ \zeta,$$

que satisfagan á las ecuaciones (2), y que para $t = o$ tomen los valores

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'.$$

Sustituyendo las integrales particulares

$$\xi = Ae^{st}\,;\ \eta = Be^{st}\,;\ \zeta = Ce^{st}$$

$$\xi' = A'e^{st}\,;\ \eta' = B'e^{st}\,;\ \zeta' = C'e^{st}$$

en el sistema (2) resultará

$$\left.\begin{array}{l} sA' - LA - RB - QC = o\,; \\ sB' - MB - PC - RA = o\,; \\ sC' - NC - QA - PB = o\,; \\ sA - A' = o\,; \\ sB - B' = o\,; \\ sC - C' = o\,; \end{array}\right\} \quad (3)$$

y deberemos despejar las constantes

$$A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C'$$

entre estas seis ecuaciones. Para ello sustituiremos los valores de A', B', C' deducidos de las tres últimas en las tres primeras, las cuales se convertirán en

$$\begin{array}{l} (s^2 - L)A - RB - QC = o\,; \\ (s^2 - M)B - PC - RA = o\,; \\ (s^2 - N)C - QA - PB = o\,; \end{array}$$

y entre estas eliminaremos A, B, C; pero la forma de estas ecuaciones es idéntica á las (2) del ejemplo anterior, sin más diferencia que la de aparecer s^2 en vez de s; luego la determinante, ó sea la ecuacion en s, será

$$(s^2 - L)(s^2 - M)(s^2 - N) - (s^2 - L)P^2 - (s^2 - M)Q^2 -$$

$$(s^2 - N)R^2 - 2\,PQR = o \qquad (4)$$

Representemos por

$$S = o \qquad (4')$$

esta ecuacion.

Las (3) podrán escribirse bajo la forma

$$\left.\begin{aligned} &sA' - LA - AB - QC = \alpha' S\,; \\ &sB' - MB - PC - RA = \beta' S\,; \\ &sC' - NC - QA - PB = \gamma' S\,; \\ &sA - A' = \alpha S\,; \\ &sB - B' = \beta S\,; \\ &sC - C' = \gamma S\,; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

y entre ellas debemos despejar

$$A\,,\ B\,,\ C\,,\ A'\,,\ B'\,,\ C'.$$

Para ello sustituyamos en las tres primeras los valores de A', B', C' deducidas de las tres últimas, y resultará

$$(s^2 - L)A - RB - QC = (\alpha' + \alpha s)S\,;$$

$$(s^2 - M)B - PC - RA = (\beta' + \beta s)S\,;$$

$$(s^2 - N)C - QA - PB = (\gamma' + \gamma s)S\,;$$

pero estas son de la misma forma que las (2') del ejemplo anterior, sin más diferencia que la sustitucion de s por s^2, y la de

$$\alpha' + \alpha s\,;\ \beta' + \beta s\,;\ \gamma' + \gamma s \text{ á } \alpha,\ \beta,\ \gamma\,;$$

de aquí resulta que sin nuevos cálculos podremos escribir:

$$\begin{aligned}
A &= (\alpha' + \alpha s)\left[(s^2 - M)(s^2 - N) - P^2\right] + (\beta' + \beta s)\left[R(s^2 - N) + PQ\right] + (\gamma' + \gamma s)\left[Q(s^2 - M) + PR\right];\\
B &= (\alpha' + \alpha s)\left[R(s^2 - N) + PQ\right] + (\beta' + \beta s)\left[(s^2 - L)(s^2 - N) - Q^2\right] + (\gamma' + \gamma s)\left[P(s^2 - L) + QR\right]; \qquad (6)\\
C &= (\alpha' + \alpha s)\left[Q(s^2 - M) + PR\right] + (\beta' + \beta s)\left[P(s^2 - L) + QR\right] + (\gamma' + \gamma s)\left[(s^2 - L)(s^2 - M) - R^2\right];
\end{aligned}$$

y haciendo en estas fórmulas

$$\begin{aligned}
L_1 &= (s^2 - M)(s^2 - N) - P^2\,; & P_1 &= P(s^2 - L) + QR\,;\\
M_1 &= (s^2 - L)(s^2 - N) - Q^2\,; & Q_1 &= Q(s^2 - M) + PR\,; \qquad (6')\\
N_1 &= (s^2 - L)(s^2 - M) - R^2\,; & R_1 &= R(s^2 - N) + PQ\,;
\end{aligned}$$

se convertirán en

$$A = L_1(\alpha' + \alpha s) + R_1(\beta' + \beta s) + Q_1(\gamma' + \gamma s);$$

$$B = R_1(\alpha' + \alpha s) + M_1(\beta' + \beta s) + P_1(\gamma' + \gamma s); \qquad (7)$$

$$C = Q_1(\alpha' + \alpha s) + P_1(\beta' + \beta s) + N_1(\gamma' + \gamma s).$$

Sustituyendo los valores de A, B, C en las últimas ecuaciones (5), obtendremos

$$\left.\begin{array}{l} A' = L_1 s\alpha' + (L_1 s^2 - S)\alpha + R_1(s\beta' + s^2\beta) + Q_1(s\gamma' + s^2\gamma) \\ B' = M_1 s\beta' + (M_1 s^2 - S)\beta + P_1(s\gamma' + s^2\gamma) + R_1(s\alpha' + s^2\alpha) \\ C' = N_1 s\gamma' + (N_1 s^2 - S)\gamma + Q_1(s\alpha' + s^2\alpha) + P_1(s\beta' + s^2\beta) \end{array}\right\} (7')$$

Es fácil ahora probar análogamente á lo hecho en los ejemplos anteriores, que las integrales generales de las ecuaciones propuestas son

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \mathcal{E}\dfrac{Ae^{st}}{S}; \; \eta = \mathcal{E}\dfrac{Be^{st}}{S}; \; \zeta = \mathcal{E}\dfrac{Ce^{st}}{S} \\ \\ \xi' = \mathcal{E}\dfrac{A'e^{st}}{S}; \; \eta' = \mathcal{E}\dfrac{B'e^{st}}{S}; \; \zeta = \mathcal{E}\dfrac{C'e^{st}}{S} \end{array}\right\} (8)$$

En efecto, sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2) resultará

$$\mathcal{E}\frac{A'se^{st}}{S} - L\mathcal{E}\frac{Ae^{st}}{S} - R\mathcal{E}\frac{Be^{st}}{S} - Q\mathcal{E}\frac{Ce^{st}}{S} = o,$$