valor $\frac{\pi}{2}$ (*Núm.* 2), ambos términos se destruyen, y resulta $\varphi(x)=o$.

Si $x<-1$, sustituyendo $x=-z$, en cuyo caso z es esencialmente positiva, tendremos,

$$\varphi(x)=-\frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{sen\, p(z-1)}{p}dp+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{sen\, p(z+1)}{p}dp;$$

pero las dos integrales tienen por valor $\frac{\pi}{2}$, luego los dos términos se destruyen.

Así, en resúmen, para valores mayores que $+1$ y menores que -1 la integral primitiva es nula, es decir, que representa el eje de la x.

Para valores comprendidos entre o y $+1$ ó entre o y -1

$$\int_o^\infty \frac{sen\, p(x+1)}{p}dp=\frac{\pi}{2};-\int_o^\infty \frac{sen\, p(x-1)}{p}dp=\frac{\pi}{2}$$

luego

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

III. Supongamos que $\varphi(x)$ se compone de tres partes:

entre $-\infty$ y A', siendo $OA'=1$ (*fig.* 18), $\varphi(x)=o$: es decir, el eje de la x;

entre A' y A, $\varphi(x) = +\sqrt{1-x^2}$ que es la ordenada de la circunferencia ABA';

y desde A á $+\infty$..... $\varphi(x) = o$, es decir, el eje de las ∞.

Puesto que

$$\varphi(x) = \varphi(-x)$$

deberemos emplear la fórmula (16), y resultará

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_o^x \cos px . dp \left[\int_o^{+1} + \sqrt{1-\alpha^2} \cos p\alpha \, d\alpha \right.$$

$$\left. + \int_{+1}^{+\infty} o \times \cos p\alpha . d\alpha , \right.$$

ó bien

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_o^{\infty} \cos px . dp \int_o^{+1} \sqrt{1-\alpha^2} \cos p\alpha \, d\alpha.$$

Tal es la ecuacion del lugar geométrico de la *figura* 18.

Fórmula de Fourier para funciones de dos ó más variables independientes.

Núm. 27. Supongamos una funcion $\varphi(x, y)$ de dos variables independientes, sea esta funcion única y contínua ó compuesta de otras varias, es decir, que dividiendo el plano de las x, y en polígonos A, B, C..... rectilíneos ó curvilíneos que lo cubran por completo, la parte que se proyecta sobre cada uno pertenezca á una funcion distinta: por ejemplo, la superficie que se proyecta dentro de A, plana, la que se proyecta en B, un paraboloide, etc.

Admitiremos sin embargo, para simplificar, que $\varphi(x, y)$ nunca pasa por infinito, y que para valores infinitamente grandes de x, de y ó de ambas, es cero: ó de otro modo, que la superficie compleja $z = \varphi(x, y)$ tiene por plano asintótico el plano de las x, y.

Esto dicho, nos proponemos espresar $\varphi(x, y)$ en funcion trigonométrica. Para ello basta que consideremos *primero* á $\varphi(x, y)$ como funcion de x, y que apliquemos á esta funcion la fórmula (1).

Tendremos pues

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha, y) \cos p(x - \alpha)\, d\alpha.$$

Pero $\varphi(\alpha, y)$ es funcion de y, luego podremos aplicarla igualmente la fórmula de Fourier, y tendremos

$$\varphi(\alpha, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha, \beta) \cos q(y - \beta)\, d\beta,$$

y sustituyendo en la anterior

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha, \beta)$$

$$\cos p(x - \alpha) \cos q(y - \beta)\, dp\, dq\, d\alpha\, d\beta \qquad (19)$$

Tal es la fórmula de Fourier aplicada á dos variables.

Núm. 28. *Casos particulares.* Pudiéramos como precedentemente examinar varios casos, ya fuese la funcion φ par ó impar relativamente á x ó á y: para abreviar, solo examinaremos uno de ellos.

Supongamos que sea *par* respecto á x y á y, es decir,

$$\varphi(x, y) = \varphi(-x, y) \;, \quad \varphi(x, y) = \varphi(x, -y)$$

En vez de partir de la fórmula (13) hubiéramos podido partir de la (16), y tendríamos sucesivamente

$$\varphi(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos px . dp \int_0^\infty \varphi(\alpha, y) \cos p\alpha d\alpha,$$

$$\varphi(\alpha, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos qy . dq \int_0^\infty \varphi(\alpha, \beta) \cos q\beta\, d\beta,$$

y por último

$$\varphi(x, y) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(\alpha, \beta) \cos p\alpha.$$

$$\cos q\beta . \cos px . \cos qy . dp . dq . d\alpha . d\beta. \qquad (20)$$

Núm. 29. *Ejemplo.* Supongamos que entre

$$x = 1 \;;\; x = -1 \;;\; y = 1 \;;\; y = -1,$$

es decir, para puntos comprendidos en el rectángulo *abcd* (*fi-*

gura 19), $\varphi(x, y)$ sea igual á 1, y para los demás valores de x, y sea nulo.

Tendremos, sustituyendo en la fórmula

$$\varphi(x, y)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \cos px\, dp \int_0^\infty \cos qy\, dq \int_0^\infty \cos p\beta\, d\beta$$

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha, \beta) \cos p\alpha\, d\alpha$$

resultará

$$\varphi(x, y)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \cos px\, dp \int_0^\infty \cos qy\, dq \left\{ \int_0^1 \cos p\beta . d\beta \right.$$

$$\left[\int_0^1 1 \times \cos p\alpha\, d\alpha + \int_1^\infty o \times \cos p\alpha . d\alpha \right]$$

$$+ \int_1^\infty \cos p\beta . d\beta \left[\int_0^1 o \times \cos p\alpha . d\alpha \right.$$

$$\left. + \int_1^\infty o \times \cos p\alpha\, d\alpha \right]$$

ó bien

$$\varphi(x, y)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \cos px\, dp \int_0^\infty \cos qy\, dq$$

$$\int_0^1 \cos p\beta\, d\beta \int_0^1 \cos p\alpha\, d\alpha$$

que integrando se reduce á

$$\varphi(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dq \frac{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen} q \cos px \cos qy}{p \,.\, q}$$

cuya comprobacion es sencilla.

Núm. 30. Es pues facil por medio de séries ó integrales trigonométricas expresar una funcion que en una parte del plano situada en el espacio finito tiene un valor ó valores finitos y que en el resto es cero.

Esta observacion es de mucha importancia.

Núm. 31. Generalizado sin nueva demostracion el teorema de Fourier para funciones de tres variables, x, y, z, tendremos

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\cos u(x-\alpha) \cos v(y-\beta) \cos w(z-\gamma) \qquad (21)$$

$$\frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi} \,.$$

Generalizacion del teorema de Fourier para funciones imaginarias.

Núm. 32. Supongamos que la funcion $\varphi(x, y, z)$ contiene *constantes imaginarias*, pero siendo *siempre reales* las variables independientes x, y, z; y vamos á demostrar que aun en este caso se aplica la fórmula de Fourier.

En efecto, si φ contiene constantes imaginarias se podrá descomponer en dos partes

$$\psi(x, y, z) + \chi(x, y, z)\sqrt{-1}$$

siendo ψ y χ funciones de x, y, z en que todas las constantes que entren sean reales.

Aplicando á cada una de las funciones ψ y χ el teorema de Fourier, resultará

$$\psi(x, y, z) = \int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\cos u(x-\alpha) \cos v(y-\beta) \cos w(z-\gamma)$$

$$\frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi};$$

$$\chi(x, y, z) = \int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\cos u(x-\alpha)\cos v(y-\beta)\cos w(z-\gamma)$$

$$\frac{d\alpha\,du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\,dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\,dw}{2\pi};$$

multiplicando la segunda por $\sqrt{-1}$, sumando, y observando que las integrales están tomadas entre los mismos límites y se refieren á las mismas variables, razon por la cual pueden ponerse afectando á la suma, obtendremos

$$\psi(x,y,z)+\chi(x,y,z)\sqrt{-1}=\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}{}_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\left(\psi(\alpha,\beta,\gamma)+\chi(x,y,z)\sqrt{-1}\right)\cos u(x-\alpha)\cos v(y-\beta)$$

$$\cos w(z-\gamma)\frac{d\alpha.\,du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\,dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\,dw}{2\pi}$$

ó bien sustituyendo á

$$\psi+\chi\sqrt{-1}$$

su equivalente φ

$$\varphi(x,y,z)=\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}{}_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\cos u(x-\alpha) \cos v(y-\beta) \cos w(z-\gamma)$$

$$\frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi}.$$

Resulta pues que puede aplicarse el teorema de Fourier á una funcion cualquiera de *variables reales,* aunque contenga constantes imaginarias.

La demostracion solo parte de este principio, que toda espresion imaginaria puede ponerse bajo la forma

$$\psi + \chi\sqrt{-1}.$$

Núm. 33. *Otra forma del teorema de Fourier.* Hemos demostrado, que siendo $\varphi(x)$ una funcion de una variable independiente y real, que no pasa por infinito y que tiende hácia cero para $x=-\infty$ y para $x=+\infty$, se verifica

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos u(x-\alpha)\, du \,.\, d\alpha.$$

Veamos á qué será igual la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \operatorname{sen} u(x-\alpha)\, du \,.\, d\alpha.$$

Es evidente que para cada valor de α, — por ejemplo α' — los elementos de la integral serán dos á dos iguales y de signo contrario; á saber, los correspondientes á $+u$ y $-u$

$$\varphi(\alpha')\, sen\, u(x-\alpha)\, du.\, d\alpha\,;$$

y

$$\varphi(\alpha')\, sen - u(x-\alpha)\, du.\, d\alpha = -\varphi(\alpha')\, sen\, u(x-\alpha)\, du.\, d\alpha.$$

luego la integral será idénticamente nula. No hay, pues, inconveniente en multiplicarla por $\sqrt{-1}$ y sumarla con la primera, y resultará:

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \Big[cos\, u(x-\alpha) + \sqrt{-1}\, sen\, u(x-\alpha) \Big] du.\, d\alpha$$

ó recordando la fórmula

$$cos\, z + sen\, z\sqrt{-1} = e^{z\sqrt{-1}}$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\, e^{u(x-\alpha)\sqrt{-1}}\, du.\, d\alpha. \qquad (22)$$

Núm. 34. *Generalizacion de la nueva forma.* Si la funcion es de dos variables, $\varphi(x, y)$, aplicando sucesivamente la fórmula (21) á cada variable resultará

$$\varphi(x, y) = \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u(x-\alpha)\sqrt{-1}} \varphi(\alpha, y) \frac{du \, . \, d\alpha}{2\pi},$$

$$\varphi(\alpha, y) = \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{v(y-\beta)\sqrt{-1}} \varphi(\alpha, \beta) \frac{dv . d\beta}{2\pi},$$

y sustituyendo

$$\varphi(x, y) = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(u(x-\alpha)+v(y-\beta)\right)\sqrt{-1}} \varphi(\alpha, \beta)$$

$$\frac{du . d\alpha}{2\pi} . \frac{dv . d\beta}{2\pi} .$$

En general

$$\varphi(x, y, z) = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \frac{du . d\alpha}{2\pi} . \frac{dv \, d\beta}{2\pi} . \frac{dw \, d\gamma}{2\pi} . \qquad (22)$$

En esta fórmula

$$x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ u,\ v,\ w$$

son cantidades reales, pero la funcion φ *puede contener constantes imaginarias.*

Núm. 35. Para completar este punto debemos hacer una observacion análoga á las de los números anteriores.

Supongamos que x, y, z representan las tres coordenadas de un punto cualquiera M del espacio, y sea $\varphi(x, y, z)$ una cantidad ó magnitud que se refiera á dicho punto: por ejemplo su *densidad*, ó su *temperatura*, ó su *presion* en una direccion dada, ó si este punto está materializado por una molécula, la distancia á que en cierto instante se halla de su posicion de equilibrio, ó la *velocidad* con que oscila, etc.; si suponemos que para todos los puntos del espacio situados dentro de una superficie S la cantidad φ tiene ciertos valores, y para los puntos exteriores es nula dicha cantidad φ, siempre podremos espresarla por una integral séxtupla de la forma (21) ó (22').

Pero estas integrales son, ó suma de elementos trigonométricos

$$\cos u(x-\alpha) \cos v(y-\beta) \cos w(z-\gamma) \tag{23}$$

ó de esponenciales

$$e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-r)\right]\sqrt{-1}} \tag{24}$$

luego toda ley de valores para φ (con las restricciones esplicadas) en el espacio, se puede espresar por sumas de fracciones *trigonométricas* ó *esponenciales* (23), (24).

Sustituyendo á la palabra *suma* la palabra *superposicion*, podemos decir que por superposicion de *términos trigonométricos* ó *esponenciales*, aunque en número infinito, se obtienen todas las distribuciones en el espacio de la cantidad φ, aunque esta distribucion sea discontínua, como hemos supuesto anteriormente: es decir, aunque dentro de una superficie S, tenga φ cierto valor y sea *nulo* para el resto del espacio.

Estas observaciones son importantísimas para comprender cómo todo movimiento vibratorio puede reducirse al estudio de ondas planas.

CAPITULO II.

Teoría de los resíduos y aplicaciones.

Teoría de los resíduos. (*Briot*, Essais sur la théorie mathématique de la lumière, *pág.* 13.)

Núm. 36. Sea $f(x)$ una funcion que para valores de x muy próximos á a es finita y contínua: esta funcion podrá desarrollarse por la fórmula de Taylor, dando á x incrementos suficientemente pequeños á partir de a: es decir, que tendremos

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots..$$

$$\frac{f^{n-1}(a)}{1.2\ldots n-1}(x-a)^{n-1}+\frac{f^n\Big(a+\theta(x-a)\Big)}{1.2\ldots n}(x-a)^n;$$

ó bien, representando para abreviar

$$\frac{f^{n}\left(a+\theta(x-a)\right)}{1.2.3\ldots n} \text{ por } f_1(x)$$

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots..$$

$$\frac{f^{n-1}(a)}{1.2\ldots\, n-1}(x-a)^{n-1}+(x-a)^n f_1(x).$$

Si formamos la funcion

$$F(x)=\frac{f(x)}{x-a},$$

esta última para $x=a$ será infinita, puesto que el numerador es finito y el denominador es *cero*.

Si sustituimos por $f(x)$ su desarrollo, no considerando en él más que los dos primeros términos, resultará

$$F(x)=\frac{f(x)}{x-a}=\frac{f(a)+(x-a)f_1(x)}{x-a}=\frac{f(a)}{x-a}+f_1(x)$$

y tendremos descompuesta á $F(x)$ en dos partes: una $f_1(x)$ que no es infinita para $x=a$, y otra

$$\frac{f(a)}{x-a}$$

cuyo denominador es de primer grado en x.

El numerador $f(a)$ de esta fraccion sencilla

$$\frac{f(a)}{x-a}$$

es lo que Cauchy llama *resíduo* de $F(x)$, por relacion al valor a, que hace infinita dicha funcion $F(x)$.

Mas en general consideremos el caso

$$F(x)=\frac{f(x)}{(x-a)^n},$$

siendo $f(x)$ una funcion finita y contínua para valores de x próximos á a, y sustituyamos por $f(x)$ su desarrollo: resultará:

$$F(x)=\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots.+\frac{f^{n-1}(a)}{1.2\ldots n-1}(x-a)^{n-1}+(x-a)^n f_1(x)}{(x-a)^n}.$$

ó bien

$$F(x)=\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{f(a)}{(x-a)^n}+\frac{\frac{f'(a)}{1}}{(x-a)^{n-1}}+\ldots.$$

$$\frac{\frac{f^{n-1}(a)}{1.2\ldots n-1}}{x-a}+f_1(x).$$

La funcion $F(x)$, que es infinita para $x=a$, se compone de una suma de fracciones sencillas en cuyos denominadores entra $(x-a)$, y de una funcion $f_1(x)$ que es finita para $x=a$, y el numerador

$$\frac{f^{n-1}(a)}{1.2\ldots n-1}$$

de la fraccion de primer grado es lo que Cauchy llama el *resíduo* de $F(x)$ relativo á $x=a$, siendo a un valor que hace infinita la funcion $F(x)$.

O de otro modo, el resíduo es el coeficiente de la primera potencia de

$$\left(\frac{1}{(x-a)}\right)$$

en el desarrollo de la funcion dada $F(x)$ en potencias de esta cantidad

$$\frac{1}{x-a};$$

solo que esta definicion no es tan precisa como la anterior y exijiría nuevas explicaciones ajenas á nuestro objeto.

Aun para la primera definicion deberíamos presentar ciertas aclaraciones importantes; pero como solo hemos de hacer aplicacion de la teoría de los *resíduos* á las funciones algebráicas, basta la precedente definicion.

Núm. 37. Resulta de lo dicho el siguiente método para hallar el resíduo respecto á $x=a$ de una funcion $F(x)$, que para este valor de la variable se hace infinita:

Primero. Se determina una potencia n de $(x-a)$, tal que el producto

$$(x-a)^n \ F(x)$$

para $x=a$ sea una cantidad finita: este producto será $f(x)$.

Segundo. Se desarrolla por la serie de Taylor en potencias de $(x-a)$ dicha funcion $f(x)$.

Tercero. Se divide el resultado por $(x-a)^n$, y el coeficiente de

$$\frac{1}{x-a}$$

será el *resíduo* que se busca.

Observacion. Resulta de lo que precede que el *resíduo* solo será único y tendrá un sentido preciso cuando el desarrollo sea único tambien.

Núm. 38. Sea

$$F(x)=\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

siendo $\psi(x)$ finita y contínua para todos los valores finitos de x, — por ejemplo, un polinomio, — y $\varphi(x)$ un polinomio entero del grado m; es decir

$$\varphi(x)=(x-a)^n \ (x-b)^p \ (x-c)^q \ldots\ldots$$

La funcion $F(x)$ tendrá *resíduos* respecto á cada raiz del denominador.

Para hallar, por ejemplo, el resíduo relativo á a, buscaremos una potencia de $x-a$ tal que

$$(x-a)^n \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

sea una funcion finita y contínua para valores de x próximos á a; pero esta potencia es precisamente la del denominador, toda vez que

$$(x-a)^n \times \frac{\psi(x)}{(x-a)^n (x-b)^p (x-c)^q \ldots\ldots}$$

$$= \frac{\psi(x)}{(x-b)^p (x-c)^q \ldots\ldots}$$

es finita para $x=a$.

Resulta pues que la funcion que en general hemos designado por $f(x)$, es en este caso

$$\frac{\psi(x)}{(x-b)^p (x-c)^q \ldots\ldots}$$

ó representando

$$(x-b)^p (x-c)^q \ldots\ldots$$

por $\varphi_1(x)$

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi_1(x)}$$

Solo resta desarrollar $f(x)$, dividir por $(x-a)^n$, y tomar el coeficiente de

$$\frac{1}{(x-a)}.$$

Tomando análogamente el resíduo de $F(x)$ respecto á b, c..... la suma de todos estos se designa con el nombre de *resíduo total*, y Cauchy lo designa por el símbolo $\mathcal{E}$.

Así

$$\mathcal{E}\, F(x)$$

se lee: *resíduo total* de $F(x)$.

Núm. 39. *Aplicacion á las funciones algebráicas.* Sea $\psi(x)$ un polinomio del grado $m-1$ *á lo más*, y $\varphi(x)$ siempre del grado m.

Es decir

$$\psi(x)=Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots.\ Gx+H$$

y

$$\varphi(x)=(x-a)^n\,(x-b)^p\,(x-c)^q\ldots..$$

Se sabe por álgebra que la fraccion

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

se desarrolla en fracciones sencillas de este modo:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\frac{Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots..}{(x-a)^n\,(x-a)^p\,(x-c)^q\ldots..}$$

$$= \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \ldots . \frac{A_{n-1}}{x-a} \quad (1)$$

$$+ \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \frac{B_2}{(x-a)^{p-2}} + \ldots . \frac{B_{n-1}}{x-b}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En este desarrollo ordenado por las potencias de

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{x-b}, \quad \frac{1}{x-c} \ldots .$$

es evidente que

$$A_{n-1}, \quad B_{n-1} \ldots .$$

son los resíduos relativos á a, b..... luego tendremos

$$\mathcal{E} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = A_{n-1} + B_{n-1} + \ldots .$$

Ahora bien, si en el desarrollo (1) damos un comun denominador á las fracciones del segundo miembro, este denominador será precisamente

$$(x-a)^n \, (x-b)^p \ldots .$$

y la identidad de ambos miembros exige que

$$Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots\ldots$$

sea idéntica al numerador del segundo miembro; pero el coeficiente de x^{m-1} es precisamente

$$A_{n-1}+B_{p-1}+\ldots\ldots$$

luego tendremos

$$A=A_{n-1}+B_{n-1}+\ldots\ldots$$

y por lo tanto

$$\mathcal{E}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=A.$$

Así, el *resíduo total* de una funcion racional en la que el denomiuador es un polinomio del grado m, cuyo primer coeficiente, es decir, el de x^m, es la unidad, y el numerador es del grado m—1, es igual al *primer* coeficiente del numerador.

Corolario. Cuando el numerador es de grado inferior á m—1, el resíduo es *cero.*

Núm. 40. *Cambio de variable.* A veces conviene cambiar la variable por relacion á la cual se toman los resíduos, y he aquí cómo se procede.

Sea la funcion Fx, en cuyo desarrollo el término de primer grado en

$$\frac{1}{x-a} \text{ es } \frac{A}{x-a}:$$

se tendrá evidentemente

$$\underset{x}{\mathcal{E}} F(x) = A$$

Si sustituimos en $F(x)$ en vez de x una nueva espresion $x = kx'$, se convertirá en $F(kx')$; y el término

$$\frac{A}{x-a} \quad \text{en} \quad \frac{A}{kx'-ka'} = \frac{A}{k(x'-a')},$$

representando a por ka'.

De aquí se deduce que en el desarrollo de $F(kx')$ en potencias de $x'-a'$, el término de primer grado será

$$\frac{\frac{A}{k}}{x'-a'},$$

y que por lo tanto

$$\underset{x'}{\mathcal{E}} F(kx') = \frac{A}{k}$$

ó bien

$$k \underset{x'}{\mathcal{E}} F(kx') = A,$$

luego tendremos

$$k \underset{x'}{\mathcal{E}} F(x) = \underset{x}{\mathcal{E}} F(x).$$

Núm. 41. *Diferenciacion bajo el signo* $\mathcal{E}$. Supongamos que el numerador de F contiene otra variable t, siendo siempre el denominador un polinomio entero en x, y sea

$$F(x, t) = \frac{\psi(x, t)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{\psi(x, t)}{\varphi_1(x)}}{(x-a)^n} = \frac{f(x, t)}{(x-a)^n}.$$

Siendo $f(x, t)$ contínua por relacion á x para valores próximos al valor a, tendremos,

$$f(x, t) = f(a, t) + \frac{f'(a, t)}{1}(x-a) + \frac{f''(a, t)}{1.2}(x-a)^2$$

$$+ \frac{f'''(a, t)}{1.2.3}(x-a)^3 + \ldots\ldots + \frac{f^{n-1}(a, t)}{1.2.3\ldots\ldots n-1}(x-a)^{n-1}$$

$$+ f_1(a, t)(x-a)^n;$$

y por lo tanto

$$F(x, t) = \frac{f(a, t)}{(x-a)^n} + \frac{f'(a, t)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{\frac{f''(a, t)}{1.2}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\frac{f^{n-1}(a, t)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}}{(x-a)} + f_1(a, t).$$

Diferenciando por relacion á t y representando por D la derivada, resultará

$$D_t F(x, t) = \frac{D_t f(a, t)}{(x-a)^n} + \frac{D_t f'(a, t)}{(x-a)^{n-1}} + \dots\dots$$

$$\frac{\dfrac{D_t f^{n-1}(a, t)}{1.2.3\dots\dots(n-1)}}{x-a} + D_t f_1(a, t).$$

De este desarrollo se deduce que el residuo de $D_t F(x,t)$ es

$$\frac{D_t f^{n-1}(a, t)}{1.2.3\dots\dots(n-1)};$$

por lo tanto

$$\mathcal{E} F(x, t) = \frac{f^{n-1}(a, t)}{1.2\dots\dots n-1};$$

$$\mathcal{E} D_t F(x, t) = D_t \frac{f^{n-1}(a, t)}{1.2\dots\dots(n-1)}$$

luego

$$\mathcal{E} D_t F(x, t) = D_t \mathcal{E} F(x, t).$$

De aquí resulta que los signos $\mathcal{E}$ y D se pueden invertir.

Integracion de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con una sola variable independiente.

Núm. 42. *Primer ejemplo.* Tomemos como primer ejemplo dos ecuaciones simultáneas de primer orden

$$\left.\begin{aligned} D_t\xi &= L\xi + R\eta, \\ D_t\eta &= R\xi + M\eta; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

en las que los coeficientes L, R, M son constantes, ξ, η son funciones de t, y ésta la variable independiente.

Las ecuaciones precedentes pueden escribirse simbólicamente en la forma

$$\left.\begin{aligned} (D_t - L)\xi - R\eta &= o, \\ (D_t - M)\eta - R\eta &= o, \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

y se trata de determinar ξ y η en funcion de t, de modo que: 1.° satisfagan á las ecuaciones (1) ó (1′); y 2.° que para $t=o$ adquiera los valores

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \beta.$$

El método explicado en el Cálculo elemental conduce desde luego á los siguientes desarrollos.

Valores particulares ξ y η

$$\left.\begin{aligned} \xi &= Ae^{st} \\ \eta &= Be^{st} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

siendo A, B y s tres constantes indeterminadas.

De estas espresiones se deduce,

$$D_t\xi = Ase^{st},$$

$$D_t\eta = Bse^{st};$$

y sustituyendo en (1) ó (1') por ξ, η y sus derivadas estos valores, obtendremos las ecuaciones de condicion

$$\left.\begin{array}{l}(s-L)A-RB=o\\(s-M)B-RA=o\end{array}\right\}\qquad(3)$$

ó bien

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{s-L}{R}=\dfrac{R}{s-M}\\[2ex]\dfrac{B}{A}=\dfrac{s-L}{R}=\dfrac{R}{s-M}\end{array}\right\}\qquad(3')$$

La primera de las (3') es una ecuacion de segundo grado en s

$$(s-L)(s-M)-R^2=o,$$

ó bien

$$\left.\begin{array}{r|l}s^2-L & s+LM\\ -M & \quad -R^2\end{array}\right\}=o,\qquad(4)$$

de la cual se deducen estos dos valores

$$S = \frac{L+M}{2} \pm \sqrt{\frac{(L+M)^2}{4} - LM + R^2}\ ;$$

que espresados separadamente son

$$s_1 = \frac{L+M}{2} + \sqrt{\frac{(L-M)^2}{4} + R^2}\,,$$

$$s_2 = \frac{L+M}{2} - \sqrt{\frac{(L-M)^2}{4} + R^2}\,, \qquad (5)$$

y para cada uno de ellos podremos dar valores arbitrarios á la constante A por ejemplo, pero la B estará dada por la fórmula (3')

$$B_1 = \frac{s_1 - L}{R} A = \frac{R}{s_1 - M} A \ ; \ B_2 = \frac{s_2 - L}{R} A = \frac{R}{s_2 - M} A.$$

Dedúcense de aquí dos sistemas de valores por ξ y η:
Primer sistema:

$$\xi = Ae^{s_1 t},$$

$$\eta = \frac{R}{s_1 - M} Ae^{s_1 t}.$$

Segundo sistema: