$$AA',\ A'_1A'',\ A''_1B''$$

son iguales, y dan

$$Pp = P'p' = P''p''.$$

La série representará, pues, los arcos

$$CD,\ C'D',\ C''D''$$

cuyas ordenadas son las de las curvas

$$AA',\ A'_1A'',\ A''_1B''$$

multiplicadas por 3.

Núm. 18. Si en la fórmula (4) se supone $a=o$; $b=2\pi$, tendremos

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} F(\alpha)d\alpha+\frac{1}{\pi}\Sigma_1^{\infty}\int_o^{2\pi} F(\alpha)\cos m(x-\alpha)d\alpha \quad (5)$$

Si en vez de los dos límites anteriores se toma $a=-\pi$. $b=\pi$, se obtiene

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)d\alpha+\frac{1}{\pi}\Sigma_1^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\cos m(x-\alpha)d\alpha \quad (5')$$

De suerte que se puede desarrollar en série ordenada segun los senos y cosenos de los múltiplos de x, una parte cualquiera de $F(x)$, comprendida entre o y 2π, ó entre $-\pi$ y π.

La funcion $F(x)$ puede estar compuesta de muchas partes, perteneciendo estas á funciones de formas diversas.

Por ejemplo, puede ser (*figura* 7.ª) desde o á α una recta cuya ecuacion sea

$$y=mx+n\,;$$

desde α á β una parábola

$$y^2=2px;$$

desde β á 2π la sinusoide

$$y=A\ sen\ x.$$

La série trigonométrica (5) representará el contorno $MNPQ$, pero repetido periódicamente á derecha é izquierda del origen de coordenadas.

Es claro que $F(x)$ será aquí una funcion discontínua que representará dicho polígono, y que por lo tanto se compondrá entre los límites o y 2π de tres partes:

entre o y α $F(x)$ será igual á $mx+n$;

entre α y β $F(x)$ será igual á $\sqrt{2px}$;

y entre β y 2π $F(x)$ tomará la forma $A\ sen\ x$.

De aquí resulta que cada una de las dos integrales que constituyen los coeficientes de

$$sen\ x,\ cos\ x,\ sen\ 2x,\ cos\ 2x,\ \text{etc.},$$

se compondrá de 3 partes.

Tendremos pues desarrollando

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\alpha (m\alpha+n)\,d\alpha+\int_\alpha^\beta \sqrt{2p\alpha}\,d\alpha\right.$$

$$\left.+\int_\beta^{2\pi} A\ sen\ \alpha.\,d\alpha\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\begin{array}{l} \cos x\left[\int_0^\alpha (m\alpha+n)\cos\alpha\, d\alpha + \int_\alpha^\beta \sqrt{2p\alpha}\cos\alpha\, d\alpha \right. \\ \qquad\left. + \int_\beta^{2\pi} A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\, d\alpha\right] \\ + \mathrm{sen}\, x\left[\int_0^\alpha (m\alpha+n)\,\mathrm{sen}\,\alpha\, d\alpha + \int_\alpha^\beta \sqrt{2p\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha\, d\alpha \right. \\ \qquad\left. + \int_\beta^{2\pi} A\,\mathrm{sen}^2\alpha\, d\alpha\right] \\ + \cos 2x\left[\int_0^\alpha (m\alpha+n)\cos 2\alpha\, d\alpha + \int_\alpha^\beta \sqrt{2p\alpha}\cos 2\alpha\, d\alpha \right. \\ \qquad\left. + \int_\beta^{2\pi} A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos 2\alpha\, d\alpha\right] \\ + \mathrm{sen}\, 2x\left[\int_0^\alpha (m\alpha+n)\,\mathrm{sen}\, 2\alpha\, d\alpha + \int_\alpha^\beta \sqrt{2p\alpha}\,\mathrm{sen}\, 2\alpha\, d\alpha \right. \\ \qquad\left. + \int_\beta^{2\pi} A\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\, 2\alpha\, d\alpha\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \cos \mu x\left[\int_0^\alpha (m\alpha+n)\cos \mu\alpha\, d\alpha + \int_\alpha^\beta \sqrt{2p\alpha}\cos \mu\alpha\, d\alpha \right. \\ \qquad\left. + \int_\beta^{2\pi} A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos \mu\alpha\, d\alpha\right] \end{array}\right.$$

$$+\operatorname{sen}\mu x\left[\int_o^\alpha (m\alpha+n)\operatorname{sen}\mu\alpha\, d\alpha+\int_\alpha^\beta \sqrt{2p\alpha}\operatorname{sen}\mu\alpha\, d\alpha\right.$$

$$\left.+\int_\beta^{2\pi} A\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\mu\alpha\, d\alpha\right]$$

....

Núm. 19. Se puede dar más generalidad á las fórmulas (5) y (5′), suponiendo que el intervalo de la funcion $F(x)$, que se considera, no es 2π, sino uno cualquiera $2l$.

En efecto; si suponemos

$$x=\frac{\pi z}{l} \text{ y } \alpha=\frac{\pi\beta}{l}$$

tendremos para

$$x=o\ldots\ldots \quad z=o$$

$$x=2\pi\ldots\ldots \quad z=2l \text{ etc.}$$

$$\alpha=o\ldots\ldots \quad \beta=o$$

$$\alpha=2\pi\ldots\ldots \quad \beta=2l \text{ etc.}$$

De suerte que eliminando x y α de dichas fórmulas, resultarán estas otras

$$F\left(\frac{\pi z}{l}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2l} F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right) d.\frac{\pi\beta}{l}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_o^{2l} F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)\cos m\frac{\pi}{l}(z-\beta)\, d.\frac{\pi\beta}{l};$$

$$F\left(\frac{\pi z}{l}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{+l}F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)d.\frac{\pi\beta}{l}$$

$$+\frac{1}{\pi}\Sigma_1^{\infty}\int_{-l}^{+l}F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)\cos m\,\frac{\pi}{l}\,(z-\beta)\,d.\,\frac{\pi\beta}{l};$$

ó bien

$$F\left(\frac{\pi z}{l}\right)=\frac{1}{2l}\int_{o}^{2l}F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)d\beta$$

$$+\frac{1}{l}\Sigma_1^{\infty}\int_{o}^{2l}F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)\cos m\,\frac{\pi}{l}\,(z-\beta)\,d\beta\,;$$

$$F\left(\frac{\pi z}{l}\right)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)d\beta$$

$$+\frac{1}{l}\Sigma_1^{\infty}\int_{-l}^{+l}F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)\cos m\,\frac{\pi}{l}\,(z-\beta)\,d\beta.$$

Por último, representando

$$F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right),$$

que es una funcion de z, por $\varphi(z)$; y del mismo modo

$$F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)$$

por $\varphi(\beta)$; siendo φ una funcion de forma conocida entre o

y $2l$ ó entre $-l$ y $+l$, y sustituyendo además á las letras z y β las x y α, resultará

$$\varphi(x) = \frac{1}{2l}\int_{o}^{2l} \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

$$+\frac{1}{l}\Sigma_{1}^{\infty}\int_{o}^{2l} \varphi(\alpha) \cos\frac{m\pi(x-\alpha)}{l}\, d\alpha; \qquad (6)$$

y

$$\varphi(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

$$+\frac{1}{l}\Sigma_{1}^{\infty}\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha) \cos\frac{m\pi(x-\alpha)}{l}\, d\alpha. \qquad (7).$$

Núm. 20. En algunos CASOS PARTICULARES estas fórmulas se simplifican.

1.º Supongamos que $\varphi(x)$ es par, es decir, que

$$\varphi(x) = \varphi(-x).$$

En este caso

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha)\, sen\, m\frac{\pi\alpha}{l}\, d\alpha = o.$$

En efecto, cada dos elementos

$$\varphi(\alpha')\, sen\, \frac{m\pi\alpha'}{l}\, d\alpha' \quad \text{y} \quad \varphi(-\alpha')\, sen\, \frac{-m\pi\alpha'}{l}\, d\alpha'$$

de la integral, correspondientes á valores iguales y de signo contrario de α serán tambien iguales y de signo contrario, y se destruirán.

Además, en esta misma hipótesis, por una razon análoga,

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha) \cos \frac{m\pi\alpha}{l} d\alpha = 2\int_{0}^{l} \varphi(\alpha) \cos \frac{m\pi\alpha}{l} d\alpha.$$

De suerte que desarrollando las fórmulas (5′) y (7) en sus diversos términos, y en cada uno de ellos los cosenos

$$\cos m \frac{\pi(x-\alpha)}{l} \quad \text{ó} \quad \cos m(x-\alpha),$$

todos los coeficientes de los senos de

$$\frac{m\pi x}{l}$$

ó de mx serán nulos, y los de los cosenos podrán simplificarse por la fórmula anterior.

Tendremos pues para el desarrollo entre $-l$ y $+l$, ó entre $-\pi$ y $+\pi$ de las funciones pares $\varphi(x)$ las séries

$$\varphi(x) = \frac{1}{l} \int_{0}^{l} \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

$$+ \frac{2}{l} \Sigma_{1}^{\infty} \cos \frac{m\pi x}{l} \int_{0}^{l} \varphi(\alpha) \cos \frac{m\pi\alpha}{l} d\alpha; \qquad (8)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \cos mx \int_o^\pi \varphi(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha. \qquad (9).$$

2.° Si la funcion φ fuese impar, de suerte que

$$\varphi(-x)=-\varphi(x)$$

tendríamos

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha)\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha=o$$

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha)\, sen\, \frac{m\pi\alpha}{l}\, d\alpha=2\int_o^l \varphi(\alpha)\, sen\, \frac{m\pi\alpha}{l}\, d\alpha,$$

y las fórmulas (5') y (7) se reducirian á

$$\varphi(x)=\frac{2}{l}\sum_1^\infty sen\,\frac{m\pi x}{l}\int_o^l \varphi(\alpha)\, sen\,\frac{m\pi\alpha}{l}\, d\alpha \quad (10)$$

$$\varphi(\alpha)=\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty sen\, mx \int_o^\pi \varphi(\alpha)\, sen\, m\alpha\, d\alpha \qquad (11)$$

Núm. 21. *Ejemplos diversos.* 1.° Propongámonos desarrollar en série trigonométrica una funcion que sea igual á una constante entre *o* y *l*, y á la misma constante con signo contrario entre *o* y —*l*.

Es decir (*fig.* 8), las dos rectas *AB*, *CD* equidistantes del eje una longitud *h*.

Observemos ante todo que siempre podemos suponer $h=1$, porque si no lo es, con multiplicar el resultado que obtengamos en esta hipótesis $h=1$ por h, quedará resuelto el problema.

Además en este caso

$$\varphi(x)=-\varphi(x),$$

luego debemos aplicar la fórmula (10), suponiendo en ella

$$\varphi(x)=1\ ,\ \varphi(\alpha)=1;$$

y tendremos

$$\varphi(x)=\pm 1=\frac{2}{l}\sum_1^\infty sen\frac{m\pi x}{l}\int_0^l sen\frac{m\pi\alpha}{l}d\alpha$$

$$=\frac{2}{l}\sum_1^\infty sen\frac{m\pi x}{l}\left(-\frac{l}{\pi m}\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\right)_0^l;$$

ó bien

$$\varphi(x)=\pm 1=\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty sen\frac{m\pi x}{l}\left(\frac{1-\cos m\pi}{m}\right)$$

Si m es par

$$1-\cos m\pi$$

es cero, luego desaparecen todos los términos de orden par.

Si m es impar

$$1-\cos m\pi=2$$

luego

$$\varphi(x=\pm 1=\frac{4}{\pi}\left(sen\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\,sen\,3\frac{\pi x}{l}\right.$$

$$+\frac{1}{5}\,sen\,5\frac{\pi x}{l}+\ldots\ldots\Big)$$

La funcion es periódica, y $2l$ es la amplitud del período. Es decir, que la ecuacion precedente es la ecuacion analítica del lugar geométrico representado por la *figura* 8.

2.° Supongamos $y=x$ entre $-l$ y $+l$, ecuacion que representa la recta AB (*fig.* 9).

Como

$$\varphi(x)=-\varphi(-x)$$

puesto que

$$x=-(-x),$$

debemos aplicar la fórmula (10), sustituyendo

$$\varphi(x)=x\ ;\ \varphi(\alpha)=\alpha.$$

Se hallará pues

$$x=\frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty} sen\frac{m\pi x}{l}\int_{0}^{l}\alpha\,sen\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Tenemos que efectuar la integral indefinida

$$\int\alpha\,sen\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

y se obtendrá integrando por partes:

$$\int\alpha\,sen\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha=\frac{l}{m\pi}\int\alpha\,sen\frac{m\pi\alpha}{l}\cdot\frac{m\pi\,d\alpha}{l}$$

$$= \frac{l}{m\pi}\alpha \times -\cos\frac{m\pi\alpha}{l} + \frac{l}{m\pi}\int \cos\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

$$= -\frac{l\alpha}{m\pi}\cos\frac{m\pi\alpha}{l} + \frac{l^2}{m^2\pi^2}\,sen\,\frac{m\pi\alpha}{l}.$$

Integrado entre $\alpha = o$ y $\alpha = l$

$$\int_o^l \alpha\,sen\,\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha = \mp\frac{l^2}{m\pi}$$

segun que m sea par ó impar.

Así

$$\int_o^l \alpha\,sen\,\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha = \frac{l^2}{\pi};\quad \int_o^l \alpha\,sen\,\frac{2\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

$$= -\frac{l^2}{2\pi};\quad \int_o^l \alpha\,sen\,\frac{3\pi\alpha}{l}\,d\alpha = \frac{l^2}{3\pi};\ \ldots..$$

y sustituyendo en el valor de x

$$x = \frac{2l}{\pi}\Big[\,sen\,\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}\,sen\,2\,\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\,sen\,3\,\frac{\pi x}{l}$$

$$-\frac{1}{4}\,sen\,4\,\frac{\pi x}{l} + \ldots..\Big]$$

El segundo miembro representa los segmentos

$$AB\ ;\ A'B'\ ;\ A''B''\ldots..$$

3.° Supongamos que $F(x)$ es igual á x entre o y l y á $-x$ entre o y $-l$; es decir, que representa la línea quebrada AOB (*fig.* 9).

En este caso se tiene

$$\varphi(x)=\varphi(-x)$$

luego debemos aplicar la fórmula (8) sustituyendo

$$\varphi(\alpha)=\alpha.$$

Tendremos pues

$$\pm x=\frac{1}{l}\int_o^l \alpha\, d\alpha+\frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos\frac{m\pi x}{l}\int_o^l \alpha\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\, d\alpha.$$

Integrando

$$\int_o^l \alpha\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\, d\alpha$$

hallaremos sucesivamente,

$$\int \alpha\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\, d\alpha=\frac{\alpha\, l}{m\pi}\, sen\,\frac{m\pi\alpha}{l}$$

$$-\int\frac{l}{m\pi}\, sen\,\frac{m\pi\alpha}{l}\, d\alpha=\frac{\alpha\, l}{m\pi}\, sen\,\frac{m\pi\alpha}{l}+\frac{l^2}{m^2\pi^2}\cos\frac{m\pi\alpha}{l};$$

$$\int_o^l \alpha\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\, d\alpha=\frac{l^2}{m^2\pi^2}(\mp 1-1)$$

y deberemos tomar el signo $+$ ó $-$ segun que m sea par ó impar.

Así

$$\int_o^l \alpha \cos\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha = -\frac{l^2}{\pi^2}.2\ ; \int_o^l \alpha\cos\frac{2\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

$$= -\frac{l^2}{2^2\pi^2}.0\ ; \int_o^l \alpha\cos\frac{3\pi\alpha}{l}\,d\alpha = -\frac{l^2}{3^2\pi^2}\,2\ ;$$

y por lo tanto

$$\pm x = \frac{l}{2} - \frac{4\,l}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos 3\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos 5\right.$$

$$\left.\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{7^2}\cos 7\frac{\pi x}{l} + \ldots\ldots\right)$$

4.° Determinemos la expresion en série de la ordenada del trapecio isósceles *OABC* (*fig.* 11).

La base *OC* es igual á π; la recta *OA* es la bisectriz del ángulo yox; y la altura *AP* es igual á α'.

De aquí resulta que

desde $x = o$ á $x = OP = \alpha'$ se tendrá $\varphi(x) = x$ y $\varphi(\alpha) = \alpha$

desde $x = \alpha'$ á $x = OQ = \pi - \alpha'$...... $\varphi(x) = AP = OP = \alpha'$

y desde $x = \pi - \alpha'$ á $x = \pi$............. $\varphi(x) = \pi - \alpha$

Supongamos además

$$\varphi(-x) = -\varphi(x),$$

en cuya hipótesis la série espresará la línea

.....*C'B'A'OABCDEF*.....

cuyo período es

$$C'B'A'OABC.$$

Es evidente que deberemos aplicar la fórmula (12), y resultará

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty} \operatorname{sen} mx \left[\int_0^{\alpha'} \alpha \operatorname{sen} m\alpha\, d\alpha + \int_{\alpha'}^{\pi-\alpha'} \alpha' \operatorname{sen} m\alpha\, d\alpha \right.$$

$$\left. + \int_{\pi-\alpha'}^{\pi} (\pi-\alpha) \operatorname{sen} m\alpha\, d\alpha \right]$$

Las tres integrales son:

$$\int_0^{\alpha'} \alpha \operatorname{sen} m\alpha\, d\alpha = \left(-\frac{\alpha \cos m\alpha}{m} \right)_0^{\alpha'} + \frac{1}{m} \int_0^{\alpha'} \cos m\alpha\, d\alpha$$

$$= \left(-\frac{\alpha \cos m\alpha}{m} + \frac{\operatorname{sen} m\alpha}{m^2} \right)_0^{\alpha'} = -\frac{\alpha' \cos m\alpha'}{m} + \frac{\operatorname{sen} m\alpha}{m^2};$$

$$\int_{\alpha'}^{\pi-\alpha'} \alpha' \operatorname{sen} m\alpha\, d\alpha = \left(-\frac{\alpha' \cos m\alpha}{m} \right)_{\alpha'}^{\pi-\alpha'} = \frac{\alpha' \cos m\alpha'}{m}$$

$$-\frac{\alpha' \cos m(\pi-\alpha')}{m};$$

$$\int_{\pi-\alpha'}^{\pi} (\pi-\alpha) \operatorname{sen} m\alpha\, d\alpha = \pi \int_{\pi-\alpha'}^{\pi} \operatorname{sen} m\alpha\, d\alpha - \int_{\pi-\alpha'}^{\pi} \alpha \operatorname{sen} m\alpha\, d\alpha$$

$$=\left(-\frac{\pi\cos m\alpha}{m}\right)_{\pi-\alpha'}^{\pi}-\left(-\frac{\alpha\cos m\alpha}{m}+\frac{sen\ m\alpha}{m^2}\right)_{\pi-\alpha'}^{\pi}$$

$$=-\frac{\pi}{m}\left(\cos m\pi-\cos m(\pi-\alpha')\right)-\left(-\frac{\pi\cos m\pi}{m}\right.$$

$$\left.+\frac{(\pi-\alpha')\cos(\pi-\alpha')m}{m}-\frac{sen\ m(\pi-\alpha')}{m^2}\right)$$

$$=\frac{\alpha'\cos m(\pi-\alpha')}{m}-\frac{sen\ m(\pi-\alpha')}{m^2}.$$

Luego el coeficiente de *sen mx* será

$$-\frac{\alpha'\cos m\alpha'}{m}+\frac{sen\ m\alpha'}{m^2}+\frac{\alpha'\cos m\alpha'}{m}-\frac{\alpha'\cos m(\pi-\alpha')}{m}$$

$$+\frac{\alpha'\cos m(\pi-\alpha')}{m}+\frac{sen\ m(\pi-\alpha')}{m^2}=\frac{sen\ m\alpha'}{m^2}$$

$$+\frac{sen\ m(\pi-\alpha')}{m^2}.$$

Si m es par tendremos

$$\frac{sen\ m\alpha'}{m^2}+\frac{sen\ m(\pi-\alpha')}{m^2}=0;$$

si m es impar

$$\frac{sen\ m\ \alpha'}{m^2}+\frac{sen\ m\,(\pi-\alpha')}{m^2}=2\ \frac{sen\ m\ \alpha'}{m^2}\ .$$

De aquí se deduce inmediatamente

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\left[2\ sen\ \alpha'\ sen\ x+2\ \frac{sen\ 3\ \alpha'}{3^2}\ sen\ 3\ x\right.$$

$$\left.+2\ \frac{sen\ 5\ \alpha'}{5^2}\ sen\ 5\ x+\ldots\ldots\right];$$

$$\varphi(x)=\frac{4}{\pi}\left[sen\ \alpha'\ sen\ x+\frac{sen\ 3\ \alpha'}{3^2}\ sen\ 3\ x\right.$$

$$\left.+\frac{sen\ 5\ \alpha'}{5^2}\ sen\ 5\ x+\ldots\ldots\right]$$

Si el lado AB desaparece, el trapecio se convierte en un triángulo, y α' será igual á $\frac{\pi}{2}$.

La ecuacion de la línea $OABC$.... (*fig.* 12) será

$$\varphi(x)=\frac{4}{\pi}\left[sen\ x-\frac{1}{3^2}\ sen\ 3\ x+\frac{1}{5^2}\ sen\ 5\ x-\ldots\ldots\right].$$

Espresion de funciones arbitrarias no periódicas por medio de integrales definidas.—Fórmula de Fourier para funciones de una variable independiente.

Núm. 22. Hemos demostrado que la fórmula

$$\varphi(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\, d\alpha$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{1}^{\infty}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos\frac{m\pi(x-\alpha)}{l}\, d\alpha$$

representa entre $-\infty$ y $+\infty$ una funcion periódica; pero entre $-l$ y $+l$ representa una funcion cualquiera, contínua ó discontínua, sencilla ó compuesta de otras, es decir, un contorno cualquiera, y esto porque el período es completamente arbitrario.

Si l crece sin límites y se convierte en ∞, el *período*, que es arbitrario, comprenderá todo el espacio en el sentido de las x, y por lo tanto el segundo miembro de la ecuacion anterior será su representacion analítica.

Entremos en algunos detalles.

Supongamos para evitar dificultades, que $\varphi(x)$ no llega á ser infinita para ningun valor de x, y que además para

$$x = -\infty \text{ y } x = +\infty$$

es *nula;* de suerte que la curva representada por $y = \varphi(x)$ se aproxima por uno y otro extremo del eje de las x á dicho eje.

Observemos ante todo que

$$\frac{1}{2t}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

tiende hácia *cero* á medida que l crece.

Supongamos, para fijar las ideas, que $\varphi(\alpha)$ es constantemente positiva; representemos por BCB' (*fig*, 13) la curva $y=\varphi(\alpha)$, y sea $OP=OP'=l$.

$$\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

representa el área $B'CBPP'=M$, luego

$$\frac{\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\,d\alpha}{2l}=N$$

representará la altura AP de un rectángulo $AA'P'P$, equivalente á dicha área. Pero si l recibe el incremento $Pp=P'p'$ infinitamente pequeño, el área de M recibe un incremento representado por $BPpb+B'P'p'b'$, y el rectángulo $AapP+A'a'p'P'$ será mayor que el anterior incremento. De aquí se deduce que la nueva altura, que no es otra cosa que el nuevo valor de N, debe ser menor que AP.

De aquí se deduce tambien que á medida que l crece disminuye N. Sin embargo, esto no prueba que N llegue hasta *cero*. Para completar la demostracion observaremos, y en rigor con esto basta, que si fijamos un límite inferior finito ON' para el cuociente N, llegaremos á un resultado absurdo. En efecto, ó podemos determinar un valor de l tal que $l\times ON'$ sea mayor que toda el área de la curva, ó no.

Si lo primero, es claro que ON' no puede ser su límite inferior, puesto que la altura correspondiente á l será menor que N', y con mayor razon la que se refiere á valores mayores de l.

Si lo segundo, creciendo l el rectángulo recibirá incrementos $FF'QQ'$, infinitamente mayores que los $ff'QQ'$ de la curva, puesto que fQ llega á ser tan pequeño como se quiera: luego el rectángulo llegará á ser mayor que el área de la curva, y estaremos en el primer caso.

O de otro modo, sea $FQ=H$; $fQ=h$ y δ el exceso del área de la curva correspondiente á OQ sobre la del rectángulo.

Demos un incremento λ á l: $H\lambda$ será el incremento del rectángulo, $h\lambda$ una cantidad superior al incremento de la curva; luego $H\lambda-h\lambda$ será menor que lo que ha aumentado la diferencia entre ambas áreas; pero si hacemos

$$H\lambda-h\lambda=\delta, \text{ de donde } \lambda=\frac{\delta}{H-h}$$

el nuevo rectángulo $2(l+\lambda)\times H$ será mayor que el área de la curva.

Observacion. Si $\varphi(\alpha)$ pudiera recibir valores negativos, supondríamos positivos todos los elementos de la integral, ó lo que es lo mismo, aplicaríamos sobre la parte superior del plano las ramas inferiores B..... (*fig.* 14), y la nueva línea $AB'C$ se hallaría en el primer caso. Pero como hemos aumentado el valor numérico de la integral suponiendo el mismo signo á todos sus elementos, si aun de este modo el límite de

$$\frac{\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\,d\alpha}{2l}$$

es cero, con más razon lo será el de la relacion propuesta.

Núm. 23. En cuanto á la segunda parte puede desarrollarse en sus diversos términos

$$\varphi(x)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos\frac{\pi}{l}(x-\alpha)d\alpha$$

$$+\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos 2\,\frac{\pi}{l}(x-\alpha)\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos 3\,\frac{\pi}{l}(x-\alpha)\,d\alpha+\ldots\ldots$$

$$+\,\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos m\,\frac{\pi}{l}(x-\alpha)\,d\alpha+\ldots\ldots$$

ó multiplicando y dividiendo por π, y representando $\frac{\pi}{l}$, que será infinitamente pequeña puesto que l es infinitamente grande, por ε

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{\pi}\Big[\ \varepsilon\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos\varepsilon(x-\alpha)\,d\alpha$$

$$+\varepsilon\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos 2\,\varepsilon(x-\alpha)\,d\alpha$$

$$+\varepsilon\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos 3\,\varepsilon(x-\alpha)\,d\alpha$$

$$+\varepsilon\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos 4\varepsilon(x-\alpha)\,d\alpha+\ldots\ldots$$

$$+\varepsilon\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos m\varepsilon(x-\alpha)\,d\alpha+\ldots\ldots$$

Ahora bien, las diferentes integrales del segundo miembro no son otra cosa que los valores de la funcion de

$$\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha$$

cuando á la variable p se le dan los valores ε, 2ε, 3ε,..... $m\varepsilon$..... es decir, cuando se hace crecer dicha variable por incrementos infinitamente pequeños ε; pero cada uno de estos valores está multiplicado por ε, que puede designarse por dp; luego el límite del paréntesis, cuando l tiende á ∞, es la integral entre o é ∞ de

$$dp\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos p(\alpha-x)\,d\alpha$$

y por lo tanto

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha \qquad (12)$$

Como cambiando el signo á p, el coseno no varia, resulta que

$$\int_{-\infty}^{o}dp\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha$$

se compone de los mismos elementos en órden inverso que la integral (12); luego tomando esta última, respecto á p entre $-\infty$ y $+\infty$ se duplicará, y para conservar el mismo valor de $\varphi(x)$ deberemos dividir por 2.

Por lo tanto

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos p(\alpha-x)\,d\alpha \quad (13)$$

Esta fórmula es la conocida con el nombre de fórmula de Fourier.

Núm. 24. *Casos particulares.* 1.° Si la funcion $\varphi(\alpha)$ es par, es decir $\varphi(-\alpha)=\varphi(\alpha)$, se tendrá evidentemente

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\,sen\,p\,\alpha.d\alpha=o \quad (14)$$

En efecto, los elementos de la integral son dos á dos iguales de signo contrario, por lo tanto se destruyen.

Además

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos p\alpha\,d\alpha=2\int_{o}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos p\alpha\,d\alpha \quad (15)$$

puesto que no variando el signo del $\cos p\alpha$ porque p cambie de signo, la integral se compondrá de elementos dos á dos iguales á partir de $p=o$.

Esto espuesto, desarrollemos el coseno de la fórmula (12); resultará

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}dp\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos p\,x\cos p\,\alpha\,d\alpha\right.$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\, sen\, p\, x\, sen\, p\, \alpha\, d\alpha \Big]$$

ó bien

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} dp \left[cos\, p\, x \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) cos\, p\, \alpha\, d\alpha \right.$$

$$\left. + sen\, p\, x \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\, sen\, p\, \alpha\, d\alpha \right]$$

que en virtud de las ecuaciones (14) y (15) se reduce á

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} cos\, p\, x . dp \int_{0}^{\infty} \varphi(\alpha)\, cos\, p\, \alpha\, d\alpha \qquad (16)$$

Aplicando el mismo método á la fórmula (14) obtendríamos idéntico resultado.

2.° Si la funcion $\varphi(\alpha)$ fuese impar, es decir

$$\varphi(\alpha) = -\varphi(-\alpha)$$

tendríamos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\, cos\, p\, \alpha\, d\alpha = o$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\, sen\, p\, \alpha . d\alpha = 2 \int_{0}^{\infty} \varphi(\alpha)\, sen\, p\, \alpha\, d\alpha$$

y desarrollando los cosenos en cualquiera de las fórmulas (12) y (13) resultará

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} sen\, px\, dp \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\, sen\, p\alpha\, d\alpha \qquad (17)$$

las fórmulas (12) y (13), (16) y (17) son fundamentales en las cuestiones de física matemática, y espresan el desarrollo de una funcion φ, ya sea par (fórmula 16), ya impar (fórmula 17), ya no sea ni lo uno ni lo otro (fórmulas 12 ó 13) en série trigonométrica. Y decimos en *série*, porque toda integral no es otra cosa que la suma de infinitos términos infinitamente pequeños.

Así, por ejemplo, en la fórmula (17) tenemos el desarrollo de $\varphi(x)$ en *senos*, y pueden escribirse así :

$$\varphi(x) = A' \begin{matrix} sen \\ cos \end{matrix} p'x + A'' \begin{matrix} sen \\ cos \end{matrix} p''x + A''' \begin{matrix} sen \\ cos \end{matrix} p'''x + \ldots\ldots \qquad (19)$$

advirtiendo que p', p'', p'''..... crecen por la ley de continuidad desde *cero*, y que el coeficiente general $A^{(m)}$ es de la forma

$$\frac{2}{\pi}\, dp \int_{0}^{\infty} \varphi(\alpha)\, sen\, p\alpha\, d\alpha$$

y por lo tanto una funcion de p infinitamente pequeña.

Núm. 25. Que las integrales dobles (12), (13), (16) y (17) representan funciones de x es evidente, porque la integracion respecto á α hace desaparecer esta variable, toda vez que los límites o é ∞ son constantes, y además la integracion respecto á p, por idéntica razon, hace que desaparezca esta cantidad, y solo quedan coeficientes constantes y la variable x. Las integrales, pues, solo sirven para indicar la ley de los coeficientes de la ecuacion (18).

Ahora bien, la funcion $\varphi(x)$, que se estiende desde $-\infty$ á $+\infty$, está representada por una de las cuatro ecuaciones (12), (13), (16), (17), cuya verdadera forma es la (18); y de aquí se deduce esta importantísima proposicion:

Sumando algebráicamente las ordenadas de infinitas sinusoides $y=A$ sen px ó $y=A$ cos px, cuyos coeficientes A y p se determinan convenientemente, se puede obtener la ordenada de una línea cualquiera.

Téngase muy presente esta proporcion, porque nos ha de servir para fundar la teoría de la propagacion de la luz en el caso de ondas planas.

Núm. **26.** *Ejemplos. I.* Supongamos que $\varphi(x)$ haya de ser

$$\text{entre } o \text{ é } \infty \ldots\ldots\ldots \quad \varphi(x)=e^{-x},$$

$$\text{y entre } o \text{ y } -\infty \ldots\ldots \quad \varphi(x)=e^{x}.$$

La línea cuya ecuacion buscamos será la $B'AB$ (*fig.* 16), compuesta de los dos arcos $B'A$ y AB de las dos curvas esponenciales

$$BAC,\ B'AC'.$$

Como

$$\varphi(x)=\varphi(-x),$$

es decir

$$e^{x}=e^{-(-x)},$$

deberemos aplicar la fórmula (16), y tendremos

$$y=\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_{o}^{\infty}\cos px.dp\int_{o}^{\infty}e^{-\alpha}\cos p\alpha\, d\alpha\,;$$

pero (*Núm.* 2)

$$\int_o^\infty e^{ax} \operatorname{sen} \alpha x \, dx = \frac{a}{a^2+\alpha^2},$$

luego

$$\int_o^\infty e^{-\alpha} \cos p\alpha \, d\alpha = \frac{-1}{1+p^2},$$

y por consiguiente

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_o^\infty \frac{\cos px}{1+p^2} \, dp.$$

II. Supongamos que $\varphi(x)$ se compone de tres partes:

entre $x = -\infty$ y $x = -1$... $\varphi(x) = o$,

entre $x = -1$ y $x = +1$... $\varphi(x) = 1$,

y entre $x = +1$ y $x = +\infty$.. $\varphi(x) = o$.

Es decir, que la línea cuya ecuacion bajo série trigonométrica buscamos, se compone de la parte $C'B'$ (*fig.* 17) del eje de las x, de la recta $A'A$, y de la parte positiva BC del mismo eje.

Puesto que en este caso

$$\varphi(x) = \varphi(-x),$$

tendremos, aplicando la fórmula (16),

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos px.dp\left[\int_{0}^{+1}1\times\cos p\alpha\, d\alpha\right.$$

$$\left.+\int_{+1}^{+\infty}o\times\cos p\alpha\, d\alpha\right];$$

ó bien

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos px.dp\int_{0}^{+1}\cos p\alpha\, d\alpha$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} p\cos px}{p}\,dp.$$

Comprobacion. La expresion

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} p\cos px}{p}\,dp$$

puede escribirse bajo esta otra forma:

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} p(x+1)-\operatorname{sen} p(x-1)}{p}\,dp\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} p(x+1)}{p}\,dp-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} p(x-1)}{p}\,dp.$$

Ahora bien, si $x>1$, las dos integrales tienen por