con lo cual cambia de signo el seno; pero otro tanto sucede con el seno $\frac{1}{2}(\alpha-x)$ del denominador, luego el cociente

$$\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\frac{1}{2}(\alpha-x)}$$

queda invariable.

Núm. 5. Queda, pues, reducido el problema á este otro: determinar el límite de

$$\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\frac{1}{2}(\alpha-x)}d\alpha,$$

es decir, su valor en funcion de x y de cantidades constantes; ó de otro modo, para cada valor de x el correspondiente de dicha integral.

Sea $O\alpha$ (*fig.* 1.ª) el eje de las α; Oa y Ob las dos abscisas ó valores límites; $OX=x$ y

$$XA=AA'=A'A''=XB=BB'=B'B''=B''B'''$$

un intérvalo constante, igual á 2π.

Para los diferentes valores de α

$$\alpha=OA''=OX-3.2\pi\,;\ \alpha=OA'=OX-2.2\pi\,;$$

$$\alpha=OA=OX-2\pi\,;\ \alpha=OX\,;\ \alpha=OB=OX+2\pi\,;$$

$$\alpha=OB'=OX+2.2\pi\,;\ \alpha=OB''=OX+3.2\pi\,;\ldots.$$

ó bien

$$\alpha=x-3.2\pi\,;\ \alpha=x-2.2\pi\,;\ \alpha=x-2\pi\,;\ \alpha=x\,;\ \alpha=x+2\pi;$$

$$\alpha=x+2.2\pi\,;\ \alpha=x+3.2\pi\,;\ \alpha=x+4.2\pi$$

el denominador

$$sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha-x)$$

del coeficiente de la integral se reduce á *cero*, puesto que

$$sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha-\alpha+3.2\,\pi)=sen\,3\,\pi=o\,;\ \ sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha-\alpha+2.2\pi)=$$

$$sen\,2\,\pi=o\,;\ \text{etc.},$$

luego el elemento de la integral que corresponde á este valor es un elemento *completamente excepcional*, y se presenta bajo la forma $\frac{1}{0}\times d\alpha$.

Debemos pues dividir la integral dada en varias integrales parciales: unas que comprenden los elementos en que el coeficiente diferencial no es infinito; otras que corresponden á estos valores excepcionales.

A este fin tomemos

$$A''c''=A''d''=A'c'=A'd'=Ac=Ad=Xg=Xh=Be=Bf=$$
$$B'e'=B'f'=\ldots\ldots=\varepsilon$$

siendo ε una cantidad muy pequeña; y podremos descomponer la integral dada del modo siguiente, representando las abscisas por las letras que hay á sus extremidades:

$$\int_a^b=\int_a^{c''}+\int_{c''}^{d''}+\int_{d''}^{c'}+\int_{c'}^{d'}+\int_{d'}^{c}+\int_c^{d}+$$

$$\int_d^g + \int_g^h + \int_h^e + \int_e^f + \int_f^{e'} + \int_{e'}^{f'} + \int_{f'}^{e''} +$$

$$\int_{e''}^{f''} + \int_{f''}^{e'''} + \int_{e'''}^{f'''} + \int_{f'''}^{b} .$$

Las integrales parciales precedentes son, como hemos dicho, de dos clases: las unas que se refieren á los intervalos ordinarios

$$ac'' \; ; \; d''c' \; ; \; d'c ; \; dg \; ; \; he \; ; \; fe' \; ; \; f'e'' \; ; \; f''e''' \; ; \; f'''b \; ;$$

los otros á los intervalos singulares

$$c''d'' \; ; \; c'd' \; ; \; cd \; ; \; gh \; ; \; ef ; \; e'f' \; ; \; e''f'' \; ; \; e'''f''' .$$

Examinaremos una de las primeras, otra de las segundas, y podremos generalizar despues los resultados para las restantes.

Sea, por ejemplo, la integral

$$\int_h^e F(\alpha) \frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha-x)}\, d\alpha ,$$

correspondiente á los límites h, e.

Si á un valor determinado de $\alpha = Op = p$ (*fig.* 2.ª) le damos un incremento

$$pq = \frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}} ,$$

incremento que será muy pequeño para valores crecientes de m, y que tenderá constantemente á o cuando m crece sin límites, la parte correspondiente de la integral será otra integral, cuyos límitos Op, Oq diferirán infinitamente poco entre sí: á saber

$$\int_{op}^{oq} F(\alpha) \frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)} d\alpha.$$

Pero en este intérvalo, puesto que pq es infinitamente pequeña,

$$\frac{F(\alpha)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}$$

será próximamente constante, y por lo tanto tendremos, representando por α' un valor comprendido entre p y q,

$$\int_{op}^{oq} \frac{F(\alpha)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)} sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)d\alpha = \frac{F(\alpha')}{sen\frac{1}{2}(\alpha'-x)}$$

$$\times \int_{op}^{oq} sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\,d\alpha \qquad (3)$$

En rigor

$$\frac{F(\alpha)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}$$

no es constante para los diferentes elementos de la integral:

representemos por ε la máxima variacion, y puesto que

$$\frac{F(\alpha)}{sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha - x)}$$

es una funcion contínua, ε será por lo ménos del mismo órden que pq. El error que se comete sobre cada elemento

$$\frac{F(\alpha)}{sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha - x)}\; sen\left(m + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)\,d\alpha$$

de la integral, por la sustitucion de

$$\frac{F(\alpha')}{sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha' - x)} \quad á \quad \frac{F(\alpha)}{sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha - x)},$$

será

$$\varepsilon'\; sen\left(m + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)\,d\alpha\,,$$

siendo ε' del mismo orden á lo ménos que ε y que $\overline{pq}$, y el error total tendrá la forma

$$\int_p^q \varepsilon'\; sen\left(m + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)\,d\alpha\,;$$

así pues la verdadera ecuacion no será la (3), sino esta otra

$$\int_{op}^{oq} \frac{F(\alpha)}{sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha - x)}\; sen\left(m + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)\,d\alpha = \frac{F(\alpha')}{sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha' - x)}$$

$$\times\int_{op}^{oq} sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)d\alpha+\int_{op}^{oq}\varepsilon'\, sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)d\alpha \quad (4)$$

Pero

$$\int_{op}^{oq} sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\,d\alpha=$$

$$\int_{op}^{op+\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}} sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\,d\alpha=$$

$$-\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\left[\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\right]_{op}^{op+\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}}=o$$

luego

$$\int_{op}^{oq}\frac{F(\alpha)}{sen\,\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\,d\alpha=$$

$$\int_{op}^{oq}\varepsilon'\,sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\,d\alpha.$$

En esta integral el factor ε' y el

$$sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)$$

podrán cambiar de signo, y el producto cambiará de signo tambien: dividiendo la integral en otras varias, tales que en cada una los elementos conserven signo idéntico, y representando una de ellas por

$$\int_{p'}^{q'} \varepsilon_1 \, sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\,d\alpha$$

podremos sacar ε_1 por su valor medio, fuera de la integral, y representándolo por ε_m tendremos

$$\varepsilon_m \int_{p'}^{q'} sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\,d\alpha =$$

$$\frac{\varepsilon_m}{m+\frac{1}{2}}\left[\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)(p'-x)-\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)(q'-x)\right].$$

La cantidad comprendida en el paréntesis es infinitamente pequeña: si la representamos por B, la expresion precedente tomará la forma

$$\varepsilon_m \frac{B}{m+\frac{1}{2}};$$

é idénticas á esta serán las demás integrales en que hemos descompuesto $\int_{op}^{oq}$.

Así

$$\int_{op}^{oq} \frac{F(\alpha)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}\, sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\,d\alpha = \varepsilon_m \frac{B}{m+\frac{1}{2}}+$$

$$\varepsilon'_m \frac{B'}{m+\frac{1}{2}} + \varepsilon''_m \frac{B''}{m+\frac{1}{2}} + \ldots = (\varepsilon_m B + \varepsilon'_m B' + \ldots) \frac{1}{m+\frac{1}{2}}$$

siendo B, B', B''..... cantidades finitamente pequeñas y en número finito.

Pero $\varepsilon_m B + \varepsilon'_m B' + \ldots$.. es cuando ménos de segundo orden comparándola con ε' y con

$$pq = \frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}$$

así, suponiendo pq de primer orden, la integral $\int_{op}^{oq}$ será un infinitamente pequeño cuando ménos de tercer orden, pues contiene además de $\varepsilon_m B + \varepsilon'_m B' + \ldots$.. el factor

$$\frac{1}{m+\frac{1}{2}}.$$

Representando este valor por Δ tendremos que la relacion

$$\frac{\displaystyle\int_{op}^{oq} \frac{F(\alpha)}{sen\,\frac{1}{2}(\alpha - x)}\, sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha - x)\, d\alpha}{pq} = \frac{\Delta}{pq}$$

es un infinitamente pequeño de segundo orden, siendo de primero pq.

Lo que hemos dicho del intervalo pq pudiéramos decir de otro cualquiera qr, rs..... Luego

$$\int_h^e \frac{F(\alpha)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)} sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)d\alpha = \Delta+\Delta'+\Delta''+\Delta'''\ldots$$

representando por Δ, Δ'..... los valores de las integrales parciales y cuyas relaciones con dichos intérvalos son cantidades infinitamente pequeñas de segundo órden.

Representando, para simplificar, por, β, β', β''..... las relaciones

$$\frac{\Delta}{pq}\ ;\ \frac{\Delta'}{qr}\ ;\ \frac{\Delta''}{rs}\ldots\ldots$$

y suponiendo además

$$pq=qr=rs\ldots\ldots=\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}},$$

tendremos

$$\int_h^e = \Delta+\Delta'+\Delta''+\ldots\ldots = \beta\overline{pq}+\beta'\overline{qr}+\beta''\overline{rs}+\ldots\ldots$$

pero β, β', β''..... son cantidades infinitamente pequeñas de segundo orden, luego podremos escribir

$$\beta=A\overline{pq}^2;\ \beta'=A'\overline{qr}^2;\ \beta''=A''\overline{rs}^2\ldots\ldots$$

representando por A, A'..... cantidades variables con α pero finitas, y obtendremos

$$\int_h^c = A\,pq^3+A'\,qr^3+A''\,rs^3+\ldots\ldots = \overline{pq}^2\int_h^e A\times\overline{pq}$$

$\int_h^e A\,pq$ es una cantidad finita, y $\overline{pq}^2$ tiende hácia *cero;* luego la integral propuesta tiende tambien hácia cero á medida que m aumenta.

Núm. 6. De aquí se deduce ya que el valor de

$$\int_a^b F(\alpha)\,\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha$$

se reduce única y esclusivamente á las integrales singulares

$$\int_{c''}^{d''},\ \int_{c'}^{d'};\ \int_{c}^{d};\ \int_{g}^{h};\ \int_{e}^{f};\ \int_{e'}^{f'};$$

$$\int_{e''}^{f''};\ \int_{e'''}^{f'''}$$

correspondiente á los valores de α

$$\alpha=x\ ;\ =x\pm2\pi\ ;\ =x\pm4\pi\ ;\ =x\pm6\pi.\dots$$

y que podemos despreciar los demás.

Núm. 7. *Primer caso.* Supongamos para fijar las ideas que $b-a$ es igual, ó menor que 2π, y escojamos un punto cualquiera X (*figura* 2.ª *bis*), comprendido entre a y b. Es evidente que, de los puntos

$$A'',\ A',\ A,\ X,\ B,\ B',\ B'',\ B'''$$

de la *figura* 1.ª solo uno, X, estará comprendido entre los límites, y por lo tanto solo una integral singular

$$\int_{g}^{h} F(\alpha) \frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha-x)}\, d\alpha$$

representará el valor del segundo miembro en la ecuacion (3).

En efecto, las integrales $\int_{a}^{g}$; $\int_{h}^{b}$ tienden hácia *o* á medida que m crece.

Representando $gX{=}Xh$ por ε queda reducida la cuestion á calcular

$$\frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(\alpha) \frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha-x)}\, d\alpha\,,$$

ó bien

$$\frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(\alpha) \frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha-x)}\, d(\alpha-x)$$

cuando ε tiende hácia cero.

A primera vista parece que la integral se reducirá á *cero*, puesto que los límites tienden á ser iguales; pero al mismo tiempo α tiende hácia x,

$$sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha-x)$$

se aproxima á cero y el coeficiente diferencial á ∞, y se trata pues de una integral singular, segun hemos dicho varias veces. En resúmen, la integral se reduce á un solo elemento: pero en éste un factor $d\alpha$ tiene por límite cero, el otro

$$F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(x-\alpha)}$$

tiene por límite ∞ y el producto es una espresion indeterminada en la forma.

Puesto que los valores de α son infinitamente próximos á x, en razon á que $\alpha-x=\varepsilon$, es claro que podremos sustituir á

$$sen\frac{1}{2}(\alpha-x) \text{ el valor } \frac{1}{2}(\alpha-x).$$

Basta para convencerse de ello, recordar que el límite de la relacion

$$\frac{F(\alpha)\,sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\,d(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}$$

de dos infinitamente pequeños

$$F(\alpha)\,sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)\,d(\alpha-x) \quad \text{y} \quad sen\frac{1}{2}(\alpha-x)$$

no varia cuando á los dos ó á uno de ellos,

$$sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha-x)$$

en este caso, se sustituye otro

$$\frac{1}{2}\,(\alpha-x)$$

tal que el límite de su relacion en el primero sea la unidad.

En efecto, si en $\frac{A}{\alpha}$ se pone en vez de α, α' sabiendo que

$$lim.\;\frac{\alpha}{\alpha'}=1$$

y que por lo tanto $\alpha=\alpha'+\lambda\alpha'$ siendo λ un infinitamente pequeño, tendremos

$$\frac{A}{\alpha'+\lambda\alpha'},$$

y el error de esta sustitucion

$$\frac{A}{\alpha'}-\frac{A}{\alpha'+\lambda\alpha'}=\frac{A\lambda\alpha'}{\alpha'(\alpha'+\lambda\alpha')}=\frac{A\lambda}{\alpha'+\lambda\alpha'}=\frac{A}{\alpha}\,\lambda:$$

así

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{A}{\alpha}\,dx=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{A}{\alpha'}\,dx+\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{A}{\alpha}\,\lambda\,dx.$$

λ es variable, pero sacando un valor medio λ_1

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{A}{\alpha}\, dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{A}{\alpha'}\, dx + \lambda_1 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{A}{\alpha}\, dx$$

ó bien

$$\frac{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{A}{\alpha'}\, dx}{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{A}{\alpha}\, dx} = 1 - \lambda_1$$

y en el límite

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{A}{\alpha}\, dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{A}{\alpha'}\, dx.$$

Esto supone que todos los términos de la integral tienen el mismo signo, pero es evidente que en general aun no teniéndolo será aplicable la demostracion precedente, descomponiendo la integral en otras varias que cumplan con aquella condicion.

Tendremos pues

$$\frac{1}{2} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(\alpha) \frac{sen\left(m + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)}{sen\, \frac{1}{2}\, (\alpha - x)}\, d(\alpha - x)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(\alpha) \frac{sen\left(m + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)}{\frac{1}{2}\, (\alpha - x)}\, d(\alpha - x)$$

$$=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{\alpha-x}d(\alpha-x),$$

y sustituyendo por abreviar $\alpha-x=\omega$, se convertirá la espresion propuesta en

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(x+\omega)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}d\omega,$$

ó bien

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left[F(x)+F_1(\theta x)\omega\right]\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}d\omega$$

$$=F(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}d\omega$$

$$+\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F'(\theta x)\,\omega\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}d\omega.$$

Si á la segunda integral le aplicamos el método del número 5, probaremos que es una cantidad infinitamente pequeña que se anula para $m=\infty$, y por lo tanto tendremos

$$\int_a^b F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}d\alpha$$

$$=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(x+\omega)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}d\omega$$

$$=F(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}d\omega.$$

Ahora bien, cuando m crece sin límites, la integral

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}d\omega$$

solo tiene valores finitos para valores infinitamente pequeños de ω, y esto se probaria por el método empleado anteriormente; por lo tanto, sin alterar su valor podemos sustituir á los límites $(-\varepsilon)$ y $(+\varepsilon)$, $-\infty$ y $+\infty$, y tendremos

$$\int_a^b F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}d\alpha$$

$$=F(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}\,d\omega=\pi F(x)$$

segun la 2.ª *fórmula N* (2).

Núm. 8. Sustituyendo este valor de la integral en la fórmula (3) y dividiendo por π, tendremos

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_a^b F(\alpha)\cos(x-\alpha)\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_a^b F(\alpha)\cos 2(x-\alpha)\,d\alpha+\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha+\ldots\ldots$$

ó representando por el signo Σ la suma de varios términos de la misma forma, en los que la cantidad m recibe los valores 1, 2, 3..... m..... ∞

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_a^b F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha \qquad (4)$$

El término general de esta série es de la forma

$$A_m \, sen \, mx + B_m \cos mx$$

siendo

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_a^b F(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha ;$$

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_a^b F(\alpha) \, sen \, m\alpha \, d\alpha .$$

Núm. 9. Hemos visto que en la hipótesis $b - a < 2\pi$ para cada valor de x, $x = op$, comprendido entre a y b, el segundo miembro de la ecuacion (4) toma el mismo valor que el primero $F(x)$, cuando se hace en él igual sustitucion. Así pues, dicho segundo miembro es el desarrollo en série trigonométrica de $F(x)$, pero tan solo entre los límites a y b.

Demos á x (*figura* 3.ª) valores no comprendidos entre ambos límites, y para fijar las ideas consideremos puntos situados á la derecha de b.

Tomemos $aa' = 2\pi$, y sea p' un punto situado entre b y a'.

El denominador

$$sen \frac{1}{2} (\alpha - x)$$

de la integral

$$\int_a^b \frac{F(\alpha) \, sen \left(m + \frac{1}{2} \right) (\alpha - x)}{sen \frac{1}{2} (\alpha - x)} d\alpha$$

no pasa entre a y b por cero: en efecto, si á partir de p' tomamos á uno y otro lado de este punto el intérvalo constante 2π, ninguno de los puntos sobre ox de division caerán entre a y b, luego nunca

$$\frac{1}{2}(\alpha-x)$$

es decir, para ningun valor de α será un múltiplo de π.

De aquí se deduce inmediatamente, que la integral será nula; luego la ordenada que corresponde al punto p' del lugar geométrico que representa el segundo miembro de la ecuacion (4) es nula tambien; y como otro tanto podemos decir de los demás puntos comprendidos entre b y a', deduciremos que el desarrollo trigonométrico entre $x=ob$ y $x=oa'$ representa la porcion ba' del eje x.

Si tomamos ahora $bb'=2\pi$, y en el intérvalo $a'b'=ab$ fijamos un punto p'', llevando á partir de p'' y hácia la izquierda $p''p=2\pi$, el punto p será el único de los definidos por $x=\pm 2k\pi$ comprendidos entre a y b; luego solo una integral singular subsistirá en la general

$$\int_a^b \frac{F(\alpha)\,sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha,$$

á saber, la que corresponde al punto p. Pero esta integral es periódica respecto á x, es decir, el mismo valor toma para $x=op$ que para $x=op+2\pi$; luego $P''p''=Pp$.

De aquí se deduce que desde a' á b' la série trigonométrica tomará los mismos valores que desde a y b.

Generalizando, pues, podemos deducir que la série trigonométrica

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_a^b F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha$$

considerada como funcion de x es una funcion periódica, y representa:

1.° En los intérvalos iguales

$$ab\,;\ a'b'\,;\ a''b''\ldots\ldots\ a_1b_1\,;\ a_2b_2\ldots\ldots$$

un mismo arco

$$AB,\ A'B',\ A''B''\ldots\ldots\ A_1B_1,\ A_2B_2\ldots\ldots$$

de la curva $CABD$ definida por la ecuacion $y=F(x)$.

2.° En los intérvalos iguales

$$ba'\,;\ b'a''\,;\ b''a'''\ldots\ldots\ ab_1\,;\ a_1b_2\ldots\ldots$$

las porciones limitadas

$$ba'\,;\ b'a''\ldots\ldots\ ab_1\,;\ a_1b_2\ldots\ldots$$

del eje de las x.

Núm. 10. Nótase que la série trigonométrica no representa toda la línea CD, sino un arco finito, reproducido periódicamente. Así, si CD es una recta se repetirá el segmento AB; si es una parábola, el arco constante AB; y así en todos los casos.

Núm. 11. En el caso particular $ab=2\pi$, los intérvalos $ba'\,;\ b'a''\ldots\ldots$ desaparecen: los puntos a' y b, a'' y $b'\ldots\ldots$ coinciden, y por lo tanto la funcion trigonométrica solo representa un mismo arco de la curva CD.

Núm. 12. Examinemos en esta hipótesis particular el valor límite á que tiende la integral

$$\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,\frac{sen\left(m+\dfrac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\dfrac{1}{2}\,(\alpha-x)}\,d(\alpha-x).$$

Esta integral, segun tenemos dicho varias veces, se descompone en otras varias: unas en las que el denominador no es *nulo*, y estas desaparecen ó se anulan; otras en las que

$$sen\,\frac{1}{2}(\alpha-x)$$

se reduce á cero, y corresponden á los valores

$$\alpha=x\pm 2k\pi.$$

Tomando, pues (*figura* 4), $ac=bd=\varepsilon$, siendo ε una cantidad muy pequeña, vemos que será forzoso considerar dos integrales singulares.

Primera integral: $$\frac{1}{2}\int_d^b F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\frac{1}{2}(\alpha-x)}d(\alpha-x),$$

en la que α varía, desde Od hasta $Ob=x$, puesto que b es el punto particular que consideramos y $Ob=x$ el valor dado á dicha variable x.

Segunda integral: $$\frac{1}{2}\int_a^c F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\,\frac{1}{2}(\alpha-x)}d(\alpha-x.)$$

En efecto, si á $Ob=x$ se le disminuye en la cantidad $ab=2\pi$, se obtiene el punto a.

En resúmen, debemos obtener las integrales singulares que corresponden á los puntos a y b, y mirar sus valores como partes de la integral total $\int_a^b$, en la que se ha despreciado todo el intérvalo *cd,* es decir $\int_c^d$, por dar un resultado nulo.

Tendremos

$$\frac{1}{2}\int_a^c F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}d(\alpha-x)$$

para el punto *a*; y para el punto *b*

$$\frac{1}{2}\int_d^b F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}d(\alpha-x),$$

ó bien por consideraciones análogas á las ya espuestas

$$\frac{1}{2}F(a)\int_o^{+\varepsilon}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}d(\alpha-x)\ ;$$

$$\frac{1}{2}F(b)\int_o^{+\varepsilon}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}d(\alpha-x).$$

Sustituyendo en las integrales en vez x sus valores, que serán a para la primera y $b=a+2\pi$ para la segunda, resultará:

$$\frac{1}{2}F(a)\int_0^{+\varepsilon}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-a)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-a)}d(\alpha-a);$$

$$\frac{1}{2}F(b)\int_0^{+\varepsilon}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-a-2\pi)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-a-2\pi)}d(\alpha-a-2\pi)=$$

$$\frac{1}{2}F(b)\int_0^{+\varepsilon}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-a)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-a)}d(\alpha-a):$$

ó bien

$$F(a)\int_0^{+\varepsilon}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{2}F(a)\pi;$$

$$\text{y}\quad F(b)\int_0^{+\varepsilon}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{2}F(b)\pi.$$

El valor de la série despues de dividir por π será segun lo dicho

$$\frac{1}{2}\left[F(a)+F(b)\right]=\frac{aA+bB}{2}=\frac{bA'+bB}{2}=bM.$$

Resulta, pues, que por escepcion, y solo como caso particular, para los puntos a, b, b', b''..... la série trigonométrica da la semisuma de los dos valores que corresponden á estos puntos: ó de otro modo, cuando se da á x los valores correspondientes á uno de los dos límites, la série da la semisuma de los valores de $F(x)$ relativos á dichos límites.

Núm. 13. Hemos supuesto hasta aquí que la funcion $F(x)$ era contínua entre a y b; si pasase bruscamente del valor m, el valor n sería necesario en la integral

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d(\alpha-x)$$

suponer entre $-\varepsilon$ y o, $F(\alpha)=m$ y entre o y $+\varepsilon$, $F(\alpha)=n$, de suerte que obtendríamos, como en el número precedente,

para valor de la série $\frac{1}{2}(m+n)$.

Así, para valores de x que corresponden á soluciones de continuidad de $F(x)$, la série da la semisuma de los dos valores que toma dicha funcion para la abscisa comun x.

Núm. 14. *Segundo caso:* que el intérvalo $b-a$ sea mayor que 2π. Para fijar las ideas supongamos

$$b-a=2\pi+s \text{ siendo } s<2\pi.$$

Lo mismo que en el primer caso, consideraremos el en que x recibe un valor comprendido entre a y b; es decir, que consideramos sobre el eje de las x puntos comprendidos en el intérvalo ab.

Tomemos además $ad=2\pi$ y $cb=2\pi$, y examinemos otros tres casos secundarios:

Primero. El de una abscisa comprendida entre a y c: sea el punto p el determinado por dicha abscisa.

Determinado el punto p' por la condicion $pp'=2\pi$, es evidente que estará situado entre d y b.

La integral, que espresa el límite de la série para el valor $x=op$, se reducirá á dos integrales singulares, *una* correspondiente al punto p, *otra* al punto p': las demás serán nulas.

La del punto p será

$$F(op)\pi;$$

la del punto p'

$$F(op')\pi=F(op+2\pi)\pi;$$

y el valor de la série dividido por π, ó la ordenada pM de la curva que representa este cuociente,

$$Mp=F(op)+F(op+2\pi).$$

Si suponemos construida la curva $y=F(x)$, tendremos

$$F(op)=M'p;\ F(op+2\pi)=N'p',$$

y por lo tanto

$$Mp=M'p+N'p'.$$

Así, pues, entre a y c la série dividida por π representa la suma de cada dos ordenadas de los arcos $A'C'$ y $D'B'$, distante uno de otro el intérvalo 2π.

Segundo. Análogamente, entre d y b la série dividida por π representa

$$F(op')+F(op'-2\pi)=M'p+N'p'$$

como en el caso anterior.

Tercero. Entre c y d, el límite de la série es la ordenada qQ de la curva $F(x)$.

En efecto, para $\alpha = oq$ el denominador

$$sen\,\frac{1}{2}(\alpha - x)$$

se reduce á cero, pero no hay ningun otro valor entre dichos límites que cumpla con esta condicion, así la integral se reduce á $F(oq)\pi$.

En este caso, como en el primero, la série es periódica, y el período es 2π.

En la *figura* 3.ª, el período se compone del arco AB y del segmento rectilíneo ba'.

En la *figura* 4.ª, del arco AB.

En la *figura* 5.ª, de los dos arcos AC y $C'D'$.

Solo cuando la diferencia entre los límites b y a de la integracion es menor que 2π, la série representa la ordenada de la curva $F(x)$ en toda la extension que comprenden estos límites.

Núm. 15. Facilmente se demostraria que, por excepcion de la regla general dada en el número anterior, para $x = oa$, la série toma el valor

$$\frac{1}{2}(A'a + D'd);$$

y que para $x = ob$, toma igualmente el valor

$$x = \frac{1}{2}(Bb + cC')$$

Núm. 16. Si considerásemos puntos exteriores al intervalo ab, obtendríamos periódicamente el arco AC ó el $C'D'$.

Por ejemplo, tomando $de = 2\pi$, todo punto r comprendido entre b y e corresponderá á un valor Rr de la série, que se obtendrá haciendo $qr = 2\pi$, y levantando la ordenada qQ, tendremos en efecto $rR = qQ$.

Para convencerse de ello basta observar que la série para $Or = 2k\pi$ solo da un punto q entre a y b.

Consideraciones análogas podríamos repetir para otro punto cualquiera.

Núm. 17. Presentemos un ejemplo como ejercicio.

Si la funcion $F(\alpha)$ es periódica, 2π la extension del período y $b - a = k.2\pi$, la série dividida por π representará para cada valor de x la ordenada $F(x)$ multiplicada por k.

Dividiendo, pues, por k obtendremos el mismo resultado que si hubiéramos integrado, no entre a y $b = a + k.2\pi$ sino entre a y $a + 2\pi$.

La *figura* 6.ª representa el caso en que $k = 3$.

A un punto p determinado por $x = op$ corresponden tres integrales singulares:

Una para el punto p, cuyo valor es

$$F(op)\pi;$$

otra para el punto p', siendo $pp' = 2\pi$: su valor es

$$F(op + 2\pi)\pi;$$

otra tercera para p'', siendo $p'p'' = 2\pi$: su valor es

$$F(op + 4\pi)\pi;$$

y el valor de la série dividida por π

$$pM = F(op) + F(op + 2\pi) + F(op + 4\pi) =$$

$$pP + p'P' + p''P'' = 3\,pP;$$

porque siendo periódica $F(x)$ los arcos