[illegible]

DE LA LUZ

DON [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

TEORIA MATEMATICA

DE LA LUZ,

POR

DON JOSE ECHEGARAY,

individuo de la Real Academia de Ciencias.

(Revista de los progresos de las Ciencias, t. 19.)

MADRID:

IMPRENTA DE LA VIUDA DE AGUADO É HIJO.—PONTEJOS, 8.

1871.

Nos proponemos hacer sobre la Teoría matemática de la Luz un trabajo del mismo género que el que hicimos tiempo há sobre la Geometría superior: es decir, condensar en breves páginas lo mas elemental de dicha Teoría, para que pueda servir de introduccion al estudio de las obras clásicas, y particularmente á los admirables trabajos de Cauchy. Pero antes de entrar en materia, séanos permitido exponer como introduccion, algunos problemas matemáticos: así no nos veremos obligados á interrumpir de contínuo la parte sustancial del problema de la Luz, con desarrollos abstractos agenos á la cuestion mecánica.

La tarea que hoy emprendemos es difícil, pero nos sostiene la esperanza de que, por imperfecto que nuestro trabajo sea, alguna utilidad tendrá, aquí donde nada se ha escrito sobre Física matemática.

Madrid 1.° de abril de 1871.=*José Echegaray.*

TEORIA MATEMATICA DE LA LUZ.

INTRODUCCION

CONTENIENDO VARIOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS.

CAPITULO I.

Fórmula de Fourier.

Demostracion de varias fórmulas.

Núm. 1. Comenzaremos por demostrar dos fórmulas, de las que hemos de hacer aplicacion inmediatamente.

Demostracion de la fórmula

$$\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\cos 3u+\ldots.\ \cos mu=\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}.$$

Se sabe por trigonometría que

$$2\operatorname{sen} a\cos b=\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(b-a)$$

y que por lo tanto

$$\cos b=\frac{\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(b-a)}{2\operatorname{sen} a}.$$

Sustituyendo ahora

$$a=\frac{1}{2}u$$

se convertirá en

$$\cos b=\frac{\operatorname{sen}\left(b+\frac{1}{2}u\right)-\operatorname{sen}\left(b-\frac{1}{2}u\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u},$$

y si en esta última fórmula hacemos sucesivamente

$$b=u;\ b=2u;\ b=3u;\ b=4u;\ldots\ b=mu$$

hallaremos

$$\cos u=\frac{\operatorname{sen}\frac{3}{2}u-\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u};$$

$$\cos 2u=\frac{\operatorname{sen}\frac{5}{2}u-\operatorname{sen}\frac{3}{2}u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u};$$

$$\cos 3u=\frac{\operatorname{sen}\frac{7}{2}u-\operatorname{sen}\frac{5}{2}u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u};$$

$$\cos 4u=\frac{\operatorname{sen}\frac{9}{2}u-\operatorname{sen}\frac{7}{2}u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u};$$

. . . .

$$\cos m\,u = \frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)u - \operatorname{sen}\left(m-\frac{1}{2}\right)u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}.$$

Agregando la ecuacion evidente

$$\frac{1}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u},$$

y sumando todas ellas, tendremos, despues de suprimir términos semejantes,

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cos 3u + \ldots \cos m\,u = \frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u} \quad (1)$$

que es precisamente la fórmula que nos proponíamos demostrar.

Núm. 2. *Demostracion de la fórmula*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx = \pi.$$

Consideremos la integral indefinida

$$\int e^{-a x} \operatorname{sen}\alpha x\,dx.$$

integrándola por partes, y tomando $\operatorname{sen}\alpha x\,dx$ por parte integrable, resultará

$$\int e^{-ax} \operatorname{sen} \alpha x . dx = -\frac{e^{-ax}}{\alpha} \cos \alpha x - \frac{a}{\alpha} \int e^{-ax} \cos \alpha x . dx.$$

Aplicando la misma transformacion á la integral

$$\int e^{-ax} \cos \alpha x . dx,$$

tendremos

$$\int e^{-ax} \cos \alpha x . dx = \frac{e^{-ax}}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x + \frac{a}{\alpha} \int e^{-ax} \operatorname{sen} \alpha x . dx,$$

y sustituyendo en la anterior

$$\int e^{-ax} \operatorname{sen} \alpha x . dx = -\frac{e^{-ax}}{\alpha} \cos \alpha x - \frac{a}{\alpha^2} e^{-ax} \operatorname{sen} \alpha x$$

$$-\frac{a^2}{\alpha^2} \int e^{-ax} \operatorname{sen} \alpha x . dx.$$

Por último, despejando la integral propuesta resultará,

$$\int e^{-ax} \operatorname{sen} \alpha x . dx = \frac{\alpha^2}{a^2 + \alpha^2} \left[-\frac{\cos a x}{\alpha} - \frac{a \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha^2} \right] e^{-ax},$$

é integrando entre o é ∞

$$\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} \alpha x \, dx = \frac{\alpha}{a^2 + \alpha^2},$$

Multiplicando ambos miembros por da, como si a fuese variable, é integrando entre dos límites b y c, hallaremos, puesto que, siendo constantes los límites, se puede integrar bajo el signo $\int$,

$$\int_o^\infty sen\,\alpha\,x.dx\int_b^c e^{-ax}\,da=\int^c \frac{\frac{da}{\alpha}}{1+\frac{a^2}{\alpha^2}};$$

ó bien

$$\int_o^\infty sen\,\alpha\,x.\,dx\,\frac{e^{-bx}-e^{-cx}}{x}=arc.\,tg\,\frac{c}{\alpha}-arc.\,tg\,\frac{b}{\alpha}.$$

Finalmente, haciendo $c=\infty$, y $b=o$, la primera esponencial se reduce á la *unidad;* la segunda

$e^{-cx}=\dfrac{1}{e^{cx}}$ se *anula; arc.* $tg\,\dfrac{c}{a}=arc(tg=\infty)$ es igual á $\dfrac{\pi}{2}$;

y $arc(tg=o)$ es *nula*, por lo tanto

$$\int_o^\infty \frac{sen\,\alpha\,x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

Si observamos que

$$\int_{-\infty}^o \frac{sen\,\alpha\,x}{x}\,dx$$

se compone de los mismos elementos que la anterior, é iguales en valor numérico, puesto que

$$\frac{sen\,(-\alpha\,x)}{-x}=\frac{sen\,\alpha\,x}{x};$$

deduciremos tambien

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{sen\,\alpha\,x}{x}\,d\,x=\frac{\pi}{2};$$

y por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen\,\alpha\,x}{x}\,d\,x=\pi \qquad (2)$$

Observacion. Si en el valor

$$\int e^{-a\,x}\cos\alpha\,x\,d\,x=\frac{e^{-a\,x}}{\alpha}\,sen\,\alpha\,x+\frac{a}{\alpha}\int e^{-a\,x}\,sen\,\alpha\,x\,d\,x$$

sustituimos el de

$$\int e^{-a\,x}\,sen\,\alpha\,x\,d\,x$$

tendremos

$$\int e^{-ax}\cos\alpha\,x\,d\,x=\frac{e^{-a\,x}}{\alpha}\,sen\,\alpha\,x+\frac{a\,\alpha}{a^2+\alpha^2}\left[-\frac{\cos\alpha\,x}{\alpha}\right.$$

$$\left.-\frac{a\,sen\,\alpha\,x}{\alpha^2}\right]e^{-a\,x}$$

$$=e^{-\alpha x}\left(\operatorname{sen}\alpha x\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{a^2}{\alpha(a^2+\alpha^2)}\right)-\frac{a}{a^2+\alpha^2}\cos\alpha x\right)$$

$$=e^{-\alpha x}\left(\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}\operatorname{sen}\alpha x-\frac{a}{a^2+\alpha^2}\cos\alpha x\right)$$

y por lo tanto

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos\alpha x\,dx=\frac{a}{a^2+\alpha^2}.$$

Desarrollo en série trigonométrica de las funciones periódicas.

Núm. 3. Las aplicaciones del análisis al estudio de los fenómenos físicos, han conducido á la investigacion del desarrollo de las funciones en séries, cuyos términos sean proporcionales á los senos ó cosenos de diversos múltiplos de la variable, y estos desarrollos, ampliacion, por decirlo así, de la fórmula de Taylor, pueden obtenerse por varios métodos: de ellos expondremos, si no el más sencillo, el más rigoroso.

El problema, pues, de que vamos á ocuparnos, es el siguiente.

Dada una funcion cualquiera $F(x)$ desarrollarla en série trigonométrica, de modo que, entre los límites b y a exprese el valor de dicha funcion; es decir, que para cada valor x' de x á medida que tomemos un número mayor de términos, el conjunto difiera cada vez ménos de $F(x')$, pudiendo ser este número tan grande que la diferencia llegue á ser menor que una cantidad dada ε, por pequeña que sea.

La forma del desarrollo será pues

$$F(x)=B+(A_1 \, sen\, x+B_1 \cos x)+(A_2 \, sen\, 2\,x+B_2 \cos 2\,x)+\ldots\ldots$$
$$(A_m \, sen\, m\,x+B_m \cos m\,x)+\ldots..$$

y será preciso que entre $x=b$ y $x=a$ podamos tomar un número tal de términos, que el segundo miembro solo difiera del primero en una cantidad menor que ε; y en esta hipótesis es evidente que la igualdad anterior solo podrá subsistir legitimamente para valores de x comprendidos entre dichos límites.

El problema consiste, pues, en determinar la ley de los coeficientes, y en asegurarnos de la convergencia de la série.

Núm. 4. Puesto que la formula (1) es una série de términos ordenada *por los cosenos de los arcos múltiplos*, ocurre que quizá pueda sacarse partido de ella para la cuestion que nos ocupa.

He aquí el artificio que se ha empleado con este objeto.

Sustituyamos en la fórmula

$$\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2\,u+\cos 3\,u+\ldots.. \cos m u=\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)u}{2\, sen\, \frac{1}{2}\,u}$$

en vez de u el binomio $x-\alpha$; multipliquemos por $F(\alpha)\,d\,\alpha$ siendo $F(\alpha)$ una funcion cualquiera, é integremos entre a y b; resultará

$$(3)\ \frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,d\,\alpha+\int_a^b F(\alpha)\cos(x-\alpha)\,d\,\alpha+$$

$$\int_a^b F(\alpha)\cos 2(x-\alpha)\,d\,\alpha+\ldots.\int_a^b F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\,\alpha=$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-\alpha)}{sen\frac{1}{2}(x-\alpha)}d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{sen\frac{1}{2}(\alpha-x)}d\alpha.$$

Y para evitar complicaciones, supongamos que $F(\alpha)$ entre a y b no pasa por ∞.

Despues de efectuar las integraciones indicadas en ambos miembros, la variable α desaparece, solo restan las constantes a, b y la cantidad que podemos mirar como variable x, y así ambos miembros son funciones iguales de dicha variable x.

Ahora bien, el número de términos del primer miembro depende de m, varía sí varía esta cantidad, crece con ella, y dicho primer miembro se convierte en una série en x si $m=\infty$; pero desarrollando los cosenos resulta

$$\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha+\left[\cos x\int_a^b F(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha+sen\,x\right.$$

$$\left.\times\int_a^b F(\alpha)\,sen\,\alpha\,d\alpha\right]+\left[\cos 2x\int_a^b F(\alpha)\cos 2\alpha\,d\alpha+sen\,2x\right.$$

$$\left.\times\int_a^b F(\alpha)\,sen\,2\alpha.d\alpha\right]+\ldots.\left[\cos mx\int_a^b F(\alpha)\cos m\alpha\,d\alpha\right.$$

$$\left.+sen\,mx\int_a^b F(\alpha)\,sen\,m\alpha\,d\alpha\right]$$

série que tiene la forma que buscábamos

$$B+(A_1 sen\, x+B_1 cos\, x)+(A_2 sen\, 2\, x+A_2 cos\, 2\, x)+\ldots..$$

$$(A_m sen\, m\, x+B_m cos\, m\, x)$$

y en lo que están perfectamente definidos los coeficientes por las integrales

$$B=\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\, d\alpha\,; \quad A_1=\int_a^b F(\alpha)\, sen\, \alpha\, d\alpha\,;$$

$$B_1=\int_a^b F(\alpha)\, cos\, \alpha\, d\alpha\,;\ldots.. \quad A_m=\int_a^b F(\alpha)\, sen\, m\, \alpha\, d x\,;$$

$$B_m=\int_a^b F(\alpha)\, cos\, m\, \alpha\, d\alpha\,;$$

luego todo queda reducido á determinar el límite hácia el cual tiende el segundo miembro cuando m crece, y este límite será precisamente el valor de la série.

Así, pues, resolveremos el problema en cierto modo por un método inverso: no desarrollando en *série* una funcion *dada*, sino determinando el *límite* de una *série* trigonométrica definida de antemano.

Observacion. Nótese que tanto el primer miembro como el segundo, son funciones periódicas de x: es decir, que no varía su valor dando á esta variable un incremento $2\,\pi$; y en efecto, por aumentar los arcos $x-\alpha$; $2(x-\alpha)$; $3\,(x-\alpha)$..... en $2\,\pi$, $4\,\pi$, $6\,\pi$..... los senos y los cosenos no cambian de valor; y en cuanto al segundo miembro, el arco del numerador aumenta en

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)2\,\pi=2\,m\,\pi+\pi,$$