problema: *dada una ecuación algebráica de una incógnita, determinar si es ó no irreducible; y, dado que no lo sea, descomponerla en factores irreducibles.*

Luego volveremos sobre esta cuestión previa.

2.° Suponiendo que la ecuación del problema sea irreducible, atenderemos al exponente m de su grado: si es de la forma 2^n, podrá tal vez ser el problema de los que se resuelven con rectas y circunferencias; *pero, si no lo es, puede desde luego afirmarse que no es susceptible de tal resolución.* Este es un punto importantísimo, porque en varios casos la simple inspección del exponente m nos permite negar la posibilidad de una solución en el sentido que se pretende.

3.° Supongamos ya que la ecuación

$$x_n^{2^n}+Px_n^{2^n-1}+Qx_n^{2^n-2}+\ldots\ldots+S=0 \quad (4)$$

sea irreducible y que su exponente afecte la forma 2^n.

En este caso es preciso obtener la ecuación final del siguiente sistema (4') é identificarla con la (4), puesto que ambas representan el mismo problema.

Fijémonos, pues, en el sistema fundamental de las ecuaciones susceptibles de ser resueltas con la recta y el círculo:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^2+A\,x_1+B=0,\\
x_2^2+A_1x_2+B_1=0,\\
x_3^2+A_2x_3+B_2=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-2}^2+A_{n-3}x_{n-2}+B_{n-3}=0,\\
x_{n-1}^2+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0,\\
x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0.
\end{array}\right\}\ (4')$$

En *teoría*, parece á primera vista que la eliminación de las incógnitas intermedias x_1, x_2, x_3... x_{n-1}, podría efectuarse directamente por los métodos generales de eliminación; pero no ha de olvidarse que

en A, B entran $p, q, r\ldots$
en A_1, B_1 $\quad p, q, r\ldots x_1$
en A_2, B_2 $\quad p, q, r\ldots x_1, x_2$;

y así sucesivamente: es decir que es preciso poner en evidencia dichas incógnitas auxiliares para efectuar la verdadera eliminación.

A_{n-1}, B_{n-1}, son lineales en x_{n-1}: de modo que pueden ponerse bajo esta forma:

$$A_{n-1}=a_{n-2}x_{n-1}+a'_{n-2}\,;\; B_{n-1}=b_{n-2}x_{n-1}+b'_{n-2}$$

siendo los coeficientes a_{n-2}, a'_{n-2}, b_{n-2}, b'_{n-2}, como el subíndice lo indica, funciones racionales de $p, q, r\ldots x_1, x_2\ldots x_{n-2}$

Poniendo estos valores en la última de las ecuaciones (4'), tendremos:

$$x_n^2+(a_{n-2}x_{n-1}+a'_{n-2})\,x_n+b_{n-2}x_{n-1}+b'_{n-2}=0.$$

Pero esta ecuación es de primer grado en x_{n-1}, de suerte que obtendremos resolviéndola:

$$x_{n-1}=-\frac{x_n^2+a'_{n-2}x_n+b'_{n-2}}{a_{n-2}x_n+b_{n-2}}\,;$$

y sustituyendo este valor en la penúltima de (1'), resultará:

$$\left(\frac{x_n^2+a'_{n-2}x_n+b'_{n-2}}{a_{n-2}x_n+b_{n-2}}\right)^2-A_{n-2}\left(\frac{x_n^2+a'_{n-2}x_n+b'_{n-2}}{x_{n-2}x_n+b_{n-2}}\right)+B_{n-2}=0$$

Esta ecuación es de 4.° grado en x_n; según los subíndices, sólo entran en ella $p, q, r\ldots x_1, x_2\ldots x_{n-2}$; y puede ponerse en evidencia x_{n-2}, dando á a_{n-2}, a'_{n-2}, b_{n-2}, b'_{n-2}, A_{n-2}, B_{n-2} la forma lineal en x_{n-2}; es decir que:

$$
\begin{aligned}
a_{n-2} &= a_{n-3}\, x_{n-2} + b_{n-3} \\
b_{n-2} &= a'_{n-3}\, x_{n-2} + b'_{n-3} \\
a'_{n-2} &= a''_{n-3}\, x_{n-2} + b''_{n-3} \\
b'_{n-2} &= a'''_{n-3}\, x_{n-2} + b'''_{n-3} \\
A_{n-2} &= a^{IV}_{n-3}\, x_{n-2} + b^{IV}_{n-3} \\
B_{n-2} &= a^{V}_{n-3}\, x_{n-2} + b^{V}_{n-3}
\end{aligned}
$$

Tendremos, pues, para la ecuación de 4.º grado en x_n:

$$x_n^4 + M_1 x_n^3 + M_2 x_n^2 + M_3 x_n + M_4 = 0,$$

siendo M_1, M_2, M_3, M_4, funciones racionales de

$$a_{n-3},\ a'_{n-3} \ldots\ b_{n-3},\ b'_{n-3} \ldots\ x_{n-2}$$

Pero todas estas funciones pueden convertirse en funciones lineales de x_{n-2} por medio de la ecuación

$$x_{n-2}^2 + A_{n-3} x_{n-2} + B_{n-3} = 0.$$

Luego tendremos

$$x_n^4 + \left(M'_1 x_{n-2} + M''_1\right) x_n^3 + \left(M'_2 x_{n-2} + M''_2\right) x_n^2 +$$
$$\left(M'_3 x_{n-2} + M''_3\right) x_n + M x_{n-2} + M''_4 = 0;$$

y como esta última ecuación es lineal en x_{n-2}, resultará, despejando:

$$x_{n-2} = -\frac{x_n^4 + M''_1 x_n^3 + M''_2 x_n^2 + M''_3 x_n + M''_4}{M'_1 x_n^3 + M'_2 x_n^2 + M'_3 x_n + M'_4}$$

cuyo valor, sustituído en

$$x_{n-2}^2 + A_{n-3} x_{n-2} + B_{n-3} = 0,$$

dará una ecuación de 8.º grado en x_n.

Los nuevos coeficientes (M) serán funciones racionales de $a_{n-3} \ldots b_{n-3} \ldots A_{n-3}$ y B_{n-3}; y como todas estas cantidades pueden ponerse bajo la forma lineal $a^s_{n-4} x_{n-3} + b^s_{n-4}$, en la cual a^s_{n-4} y b^s_{n-4} son funciones de $p, q, r \ldots x_1, x_2 \ldots x_{n-4}$, estaremos siempre en el mismo caso: la ecuación de 8.° grado en x_n podrá ponerse bajo forma lineal respecto á x_{n-4}; se podrá despejar x_{n-4}; sustituirla en

$$x^2_{n-4} + A_{n-5} x_{n-4} + B_{n-5} = 0;$$

y obtener una ecuación del grado 16. Y así sucesivamente, hasta llegar á las primeras ecuaciones del grupo (4'),

Al obtener la ecuación del grado 2^n, sus coeficientes serán funciones de $a, a', a'' \ldots b, b', b'' \ldots A, B$: cantidades que ya no llevan subíndice, porque no son funciones de ninguna x; sino que *deben ser* funciones racionales (desconocidas aún) de $p, q, r \ldots$: es decir, de los datos.

Sea dicha ecuación

$$x_n^{2^n} + f_1(a, a' \ldots b, b' \ldots A, B)\, x_n^{2^n - 1} + f_2(a, a' \ldots b, b' \ldots A, B)\, x_n^{2^n - 2} + \ldots$$

$$\ldots + f_n(a, a' \ldots b, b' \ldots A, B) = 0 \qquad (5).$$

Esta ecuación ha de ser idéntica á la (4), que es la del problema; y tendremos, identificando los coeficientes y recordando que $P, Q, R \ldots S$ son funciones de $p, q, r \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} f_1\ (a, b \ldots a', b' \ldots A, B) = P\ (p, q, r \ldots) \\ f_2\ (a, b \ldots a', b' \ldots A, B) = Q\ (p, q, r \ldots) \\ f_3\ (a, b \ldots a', b' \ldots A, B) = R\ (p, q, r \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n\ (a, b \ldots a', b' \ldots A, B) = S\ (p, q, r \ldots) \end{array}\right\} (6)$$

Los datos son $p, q, r \ldots$: es decir, los propios del problema de que se trata.

Y las incógnitas son $a, b \ldots a', b' \ldots A, B$, que, para la posibilidad del problema, deben ser funciones racionales de p, $q, r \ldots$

Si del sistema (6) pueden deducirse a, b... a', b'... A, B en *función racional* de p, q, r... el problema será posible con la recta y la circunferencia, y fácilmente podrán formarse las ecuaciones (4), toda vez que conoceremos A, B, A_1, B_1, etc., pues conocemos sus elementos.

Y si hay imposibilidad absoluta de expresar dichas cantidades a, b... a', b'... A, B, en la forma indicada, imposible será también resolver el problema por intersecciones de rectas y circunferencias.

Tal es el método de Wantzel; y basta la exposición hecha para comprender su complicación en los cálculos y desarrollos, cuando el grado de la ecuación final á que conduce pasa del 8.º

Notemos aún que la resolución del problema general á que se refiere, supone resuelto este otro:

Dado un sistema de ecuaciones, investigar si pueden resolverse por funciones racionales de los datos.

Número de incógnitas. En rigor, el método de Wantzel conduce á un sistema en que el número de incógnitas es muy superior al de ecuaciones; pero puede reducirse dicho número al verdadero, como indicaremos más adelante en un ejemplo.

Esto no solamente es preciso, sino que simplifica los cálculos en extremo.

Problemas de que depende el problema principal.—Hemos visto que el problema principal depende de estos dos problemas, en general dificilísimos:

1.º Dada una ecuación de forma entera con una incógnita, ó en general, un sistema de varias ecuaciones de coeficientes racionales, investigar si admiten como solución valores racionales de las incógnitas.

2.º Dada una ecuación entera con una incógnita, y cuyos coeficientes son *funciones racionales* de los datos, decidir si la ecuación es *irreducible*.

Estos problemas, en rigor, se enlazan entre sí con cierta dependencia, como vamos á ver.

Primer problema— Sea la ecuación:

$$x^m + P(p, q, r\ldots)\, x^{m-1} + Q(p, q, r\ldots)\, x^{m-2} + \ldots$$
$$+ S(p, q, r\ldots) = 0$$

en la que P, Q, R, . son funciones racionales de los datos p, q, r...

En rigor, este problema es idéntico en el fondo al de la resolución en números enteros de las ecuaciones de grado superior, y puede tratarse por el mismo procedimiento.

Debe empezarse por convertir todos los coeficientes en funciones enteras, siendo el coeficiente de x^m la unidad.

Después se descompondrá S (p, q, r...) en sus factores racionales, simples y enteros, ó sea en funciones irreducibles; y si existen raíces de forma entera en p, q, r..., entre estos factores deberán hallarse: basta, pues, ensayar cada uno por los métodos conocidos, ó sustituirlos directamente en la ecuación, y ver si la reducen á la identidad $0 = 0$.

Pero esto, que tan fácilmente se dice, es de una complicación enorme en la mayor parte de los casos, y además supone la solución del segundo de los problemas indicados: á saber la descomposición de S (p, q, r...) en factores irreducibles racionales y enteros, funciones de p, q, r...

Wantzel propone otro método que parece más sencillo, aunque en el fondo sea tan complicado como el anterior.

Hé aquí su procedimiento.

Si existe una raíz de forma entera f (p, q, r...), de la ecuación $x^m + P\,x^{m-1} \ldots + S = 0$ (transformada previamente en otra de coeficientes enteros y de coeficiente **1** para x^m), dicha raíz, f (p, q, r...), que deberá ser un divisor de S, ordenada con relación á p, por ejemplo, podrá también escribirse de este modo:

$$a_0\, p^t + a_1\, p^{t-1} + \ldots + a_t;$$

siendo a_0, a_1, $a_2 \ldots a_t$ funciones enteras de q, r.... Pero aunque no conozcamos el valor de t, no podrá ser superior al exponente de P en S (p, q, r...): admitamos que sea igual, y pongamos $x = a_0\, p^t + a_1\, p^{t-1} + a_2\, p^{t-2} \ldots + a_t$ en la ecuación propuesta.

Ordenada ésta, que debe ser una identidad en p, q, r..., por relación á p, todos los coeficientes deben ser nulos, y tendremos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 (a_0, a_1, a_2 \ldots P, Q, R \ldots) = 0 \\ \pi_2 (a_0, a_1, a_2 \ldots P, Q, R \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \quad (\pi)$$

en las cuales las incógnitas a_0, a_1, a_2... son funciones de q, r.. es decir, que en éstas ya no entra la p.

Expresando cada incógnita, a_0 por ejemplo, por un polinomio ordenado con relación á q, tendremos

$$a_0 = a_0' q^s + a_0'' q^{s-1} + \ldots,$$

y lo mismo

$$a_1 = a_1' q^{s'} + a_1'' q^{s'-1} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sustituyendo estos valores en el sistema (π), ordenando por relación á q, é igualando los coeficientes á cero, obtendremos otro sistema, cuyas incógnitas a'_0, a''_0... a'_1, a''_1... serán funciones de r...: es decir, que habrán desaparecido p, q.

Y, continuando este procedimiento, llegaremos á ecuaciones numéricas, á las que se aplican los métodos conocidos para resolverlas en números enteros.

Muchas observaciones podrían hacerse respecto á este método, entre otras, la relativa á los exponentes t, s, s'...; pero esto nos llevaría muy lejos; y, por otra parte, el procedimiento es impracticable en la mayor parte de los casos, como hemos indicado varias veces.

Segundo problema. No menos difícil y complicado es el segundo de los dos problemas anteriores.

Sea una ecuación $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$, representando por A_0, A_1, A_2.., funciones racionales y enteras de p, q, r.. Para averiguar si es irreducible hay que ver:

1.° Si admite divisores de primer grado en x;

2.° Si admite divisores de segundo grado de dicha cantidad x; y así sucesivamente.

Por ejemplo: supongamos que se quiere ver si admite ó no divisores de 3.er grado. Representando uno de éstos por $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$, en el que a_0, a_1, a_2, a_3 han de ser funciones racionales de p, q, r..., se dividirá $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots$

por dicho divisor, y, representado el resto por $r_0x^2+r_1x+r_2-$, se igualarán á cero sus coeficientes, y tendremos:

$$r_0=0 \quad \text{ó} \quad r_0\,(p, q, r, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)=0$$
$$r_1=0 \quad \text{ó} \quad r_1\,(p, q, r, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)=0$$
$$r_2=0 \quad \text{ó} \quad r_2\,(p, q, r, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)=0$$

Será preciso, para que la ecuación propuesta tenga divisores de 1er grado con coeficientes racionales, que puedan determinarse para a_0, a_1, a_2, a_3, ó para sus relaciones $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}$, funciones racionales (enteras ó fraccionarias) que satisfagan á las ecuaciones $r_0=0$, $r_1=0$, $r_2=0$: problema que es precisamente el primero que hemos resuelto.

También pudieran seguirse otros procedimientos; pero como estas cuestiones son del dominio del Algebra superior y las suponemos conocidas, no insistiremos sobre ellas, limitándonos á las ligerísimas indicaciones que preceden y á los *artificios prácticos* que veremos más adelante.

Simplicación de las ecuaciones generales y reducción del número de incógnitas.—Basta examinar ligeramente el método general expuesto para convencerse de que en la determinación de la ecuación final en x_n de las ecuaciones (4′) entran un número de incógnitas, a, b... a′, b′... A, B, superior al número de ecuaciones (6). Esta diferencia es aparente no más; porque puede hacerse que el número de ecuaciones y de incógnitas sea el mismo, y á la vez simplificarse dicho sistema (6) de ecuaciones fundamentales.

Estas son, como ya sabemos, las siguientes:

$$\begin{aligned}
&x_1^2+A\,x_1+B=0,\\
&x_2^2+A_1x_2+B_1=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_{n-3}^2+A_{n-4}x_{n-3}+B_{n-4}=0,\\
&x_{n-2}^2+A_{n-3}x_{n-2}+B_{n-3}=0,\\
&x_{n-1}^2+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0,\\
&x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0;
\end{aligned} \qquad (4')$$

debiendo además recordar que A_{n-1} y B_{n-1} pueden ponerse bajo la forma siguiente:

$$A_{n-1} = a_{n-2}\, x_{n-1} + a'_{n-2},$$

$$B_{n-1} = b_{n-2} x_{n-1} + b'_{n-2}.$$

Pero no hay dificultad alguna en tomar como incógnita, en sustitución de x_{n-1}, la cantidad B_{n-1}: todo está reducido á despejar x_{n-1}, en función de B_{n-1}, lo cual dará

$$x_{n-1} = \frac{B_{n-1} - b'_{n-2}}{b_{n-2}},$$

y á sustituir este valor en A_{n-1}. La última ecuación del sistema (4′) se convertirá así en la que sigue:

$$x_n^2 + \left(a_{n-2} \frac{B_{n-1} - b'_{n-2}}{b_{n-2}} + a'_{n-2}\right) x_n + B_{n-1} = 0$$

O, representando $\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}$, y $a'_{n-2} - \frac{a_{n-2} \times b'_{n-2}}{b_{n-2}}$, por una sola letra cada una, con el subíndice $n-2$, para indicar funciones racionales de $p, q, r \ldots x_1, x_2 \ldots x_{n-2}$, tendremos esta otra:

$$x_n^2 + \left(c_{n-2}\, B_{n-1} + c'_{n-2}\right) x_n + B_{n-1} = 0$$

Y, volviendo á las notaciones primitivas, y poniendo por B_{n-1} la misma letra x_{n-1}, aunque es claro que será distinta de la anterior x_{n-1},

$$x_n^2 + \left(a_{n-2}\, x_{n-1} + a'_{n-2}\right) x_n + x_{n-1} = 0.$$

Es evidente que el valor de x_{n-1}, en función de B_{n-1}, deberá también sustituirse en la ecuación penúltima, volviendo luego para más sencillez á las notaciones ordinarias.

Esta misma transformación puede aplicarse á todas las ecuaciones del sistema (4'), tomando en la penúltima B_{n-2} por incógnita; en la anterior B_{n-3}, etc.: todo está reducido á la eliminación de x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4}, etc., de este modo:

$$
\begin{array}{ll}
x_{n-2} \text{ en función} & \text{de } B_{n-2}, \\
x_{n-3} & \text{de } B_{n-3}, \\
x_{n-4} & \text{de } B_{n-4}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Por este artificio al sistema (4') puede sustituirse el siguiente, mucho más sencillo:

$$
\left.
\begin{array}{l}
x_1^2+A\ x_1+B=0, \\
x_2^2+A_1x_2+x_1=0, \\
x_3^2+A_2x_3+x_2=0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-3}^2+A_{n-4}x_{n-3}+x_{n-4}=0, \\
x_{n-2}^2+A_{n-3}x_{n-2}+x_{n-3}=0, \\
x_{n-1}^2+A_{n-2}x_{n-1}+x_{n-2}=0, \\
x_n^2\ +A_{n-1}x_n\ +x_{n-1}=0.
\end{array}
\right\} \quad (4'')
$$

Repitiendo para el grupo (4'') lo expuesto para el grupo (4'), veremos fácilmente que el número de ecuaciones es igual al de incógnitas.

En efecto: la última ecuación (4'') da *dos cantidades* con el subíndice $n-2$, á saber: los coeficientes a_{n-2} y a'_{n-2} de $A_{n-1} = a_{n-2}\ x_{n-1} + a'_{n-2}$; y, al despejar x_{n-1} y al sustituir esta cantidad en la penúltima, la ecuación de cuarto grado en x_{n-1} contendrá *tres cantidades* con dicho subíndice $n-2$, á saber: A_{n-2}, a_{n-2} y a'_{n-2}: es decir, un número igual á $4-1$.

Al sustituir á A_{n-2}, a_{n-2}, a'_{n-2}, cantidades binomias lineales con x_{n-2}, el número de cantidades con subíndice $n-3$ será $3\times 2=6$; y, al poner el valor de x_{n-2} en la antepenúltima, habrá que agregar el coeficiente A_{n-3}; de suerte que el número de coeficientes con el subíndice n—3 en la ecuación de octavo grado en x_{n-2} será $6+1=7$, ú $8-1$.

Siguiendo de este modo, al llegar á la ecuación del grado 2^n en x_n el número de funciones incógnitas de p, q, r... será 2^n-1, contando sólo con A; y, agregando B, tendremos precisamente el número 2^n, que es el de las ecuaciones (6).

En rigor, de esta manera se excluye el caso posible de que B_{n-1}, B_{n-2},... no sean funciones lineales de las incógnitas auxiliares, á saber: de x_{n-1} la B_{n-1}; de x_{n-2} la B_{n-2}...; sino cantidades independientes de esta incógnita y dependientes sólo de las anteriores: es decir, de que $b\,x_{n-1}+b'$, por ejemplo, se reduzca á b', por ser $b=0$ idénticamente; pero este caso debe tratarse separadamente, ó demostrarse que está comprendido en el anterior, como indicaremos en un ejemplo.

Observación.—Debe fijarse la atención en que la mayor parte de las transformaciones indicadas respecto al sistema (1), la anterior inclusive, no han de efectuarse en cada caso, y que su único objeto es determinar la forma final y definitiva (4″) de dichas ecuaciones: son pues transformaciones de pura *demostración*, con objeto de probar que todo problema susceptible de ser resuelto por rectas y circunferencias puede expresarse por un sistema de ecuaciones sucesivas de segundo grado de la forma que indica el grupo (4″). Demostrado esto, sólo queda para cada problema la determinación de la ecuación final en x_n por el *método general* ya expuesto.

Complemento del método general. — Hemos supuesto al aplicar éste, que la ecuación (4) del problema, á saber

$$F(x)=x_n^{2^n}+P\,x_n^{2^n-1}+Q\,x_n^{2^n-2}+\ldots+S=0 \quad (4)$$

solo contenía en sus coeficientes P, Q, R... S números enteros ó fraccionarios, pero racionales, ó funciones racionales de líneas dadas p, q, r...; mas puede ocurrir otro caso de mayor generalidad, á saber: qne dichos coeficientes contengan como datos números irracionales: por ejemplo que p sea irracional.

En esta hipótesis p estará definido como raíz de una ecuación f (p)=0, ó sea

$$p^s+N_1\,p^{s-1}+N_2\,p^{s-1}+\ldots\ldots=0,$$

que podremos suponer irreducible; porque, si no lo fuera, descomponiéndola en factores irreducibles, de uno de estos sería raíz p, y este es el que consideraríamos en vez de $f(p)=0$.

Ahora bien, el problema consiste en averiguar si una ecuación $F_1(x)=0$ puede tener una raíz *función algebráica* de p, q, r... aunque algunas de estas cantidades sean irracionales, como hemos supuesto para p.

El método de las raíces enteras ó fraccionarias que da la teoría general de ecuaciones no es legítimo en este caso, porque siendo x función (aunque sea función racional) de números irracionales, como hemos supuesto que lo es p, será un número irracional también, y esto exigiría un examen especial.

Será preciso aplicar el método general, es decir, suponer,

$$x=a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \ldots + a_m,$$

siendo a_0, a_1, a_2... *funciones racionales* de q, r..., sean éstas racionales ó no, y sustituir dicho valor de x en $F(x)=0$, determinando a_0, a_1, a_2... de modo que resulte una identidad.

Hecha esta sustitución, tendremos una ecuación ó polinomio en p, cuyos coeficientes serán funciones de las incógnitas a_0, a_1, a_2... y de los coeficientes de $F_1(x)=0$; pero no podremos igualar á cero todos los coeficientes de las potencias de p, porque entre estas potencias hay una relación $f(p)=0$. y será preciso, ó dividir $F_1(x)$ por $f(p)$, ó eliminar la potencia p^s y las superiores de

$$F_1(a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \ldots + a_m)=0,$$

por medio de

$$p^s + N_1 p^{s-1} + N_2 p^{s-2} + \ldots = 0;$$

que es lo mismo que dividir una por otra ambas ecuaciones. Igualando á cero los coeficientes del resto, es decir, de las potencias p^{s-1}, p^{s-2}, p^{s-3}... tendremos un sistema de ecuaciones al cual se aplicará el método general en sus varias formas, según sean q, r..., primero, *números racionales;* segundo, *cantidades algebráicas racionales;* ó, tercero, *números irracionales*, como hemos supuesto que lo fuese p.

De todas maneras, eliminando letras ó números irracionales, llegaremos á ecuaciones que deberán ser satisfechas por números racionales de los que la teoría general de ecuaciones estudia en los tratados elementales.

Adviértase que el número m debe siempre ser inferior á s: observación que puede utilizarse en la práctica.

Aplicaciones del método de Wantzel.

1.° *Duplicación del cubo.*—Veamos si este célebre problema de la antigüedad es susceptible de ser resuelto por la recta y el círculo.

Representando por a el lado del cubo, su volumen será a^3 y el doble $2a^3$.

Representando por x el lado del cubo, cuyo volumen ha de ser doble del propuesto, su volumen será x^3, y la ecuación del problema

$$x^3 = 2a^3 \text{ ó bien } x^3 - 2a^3 = 0$$

1.° Veamos si esta ecuación es irreducible, ó si puede descomponerse en factores racionales de x y de a.

Si es posible la descomposición, sólo podrá efectuarse de dos maneras: en un factor de *primer grado* y uno de *segundo*, ó en tres de *primero;* y en ambos casos ha de haber un factor racional de primer grado.

Todo queda reducido á investigar si $x^3 - 2a^3$ tiene un factor $x - \alpha$, en que α sea función racional de a, única cantidad algebráica que la ecuación contiene; ó, de otro modo, si la ecuación propuesta tiene una raíz racional.

En este caso la raíz ha de ser un divisor del último término: luego será: 2, a, a^2, a^3, 2a, $2a^2$, ó $2a^3$, ó estas cantidades con signos negativos; y excluímos 1, porque $1 - 2a^3$ en general no es cero.

Pero ninguna de estas cantidades es raíz de $x^3 - 2a^3 = 0$.

En efecto: 2 da $8 - 2a^3$, que no es nula en general, es decir, para cualquier valor de α.

a da $a^3 - 2a^3 = -a^3$, que tampoco es nulo, á menos que tengamos $a = 0$.

a^2 da $a^6 - 2a^3 = a^3(a^3 - 2)$, que en general es también diferente de 0.

a^3 da $a^9 - 2a^3 = a^3(a^6 - 2)$, de cuyo resultado podemos decir otro tanto.

2a da $8a^3 - 2a^3 = 6a^3$, que solo se anula con *a*.

$2a^2$ da $8a^6 - 2a^3 = 2a^3(4a^3 - 1)$, distinta de cero en general.

$2a^3$ da $8a^9 - 2a^3 = 2a^3(4a^6 - 1)$, para la cual puede decirse lo mismo.

Y en los otros seis casos se llega á la misma conclusión.

2.º Resulta, pues, que la ecuación $x^3 - 2a^3 = 0$ es irreducible; pero su exponente 3 no es de la forma 2^n: luego nunca podrá resolverse el problema en general, [es decir, sin particularizar numéricamente a], por la recta y el círculo.

Para ciertos *valores numéricos* de a, que se deducen del cuadro precedente, el problema es posible: por ejemplo, en el *tercer caso*, haciendo $a^3 - 2 = 0$, de donde $a = \sqrt[3]{2}$, tendremos $x^3 - 4 = 0$; y, dividiendo por $x - a^2 = x - \sqrt[3]{4}$, resultará por cociente $x^2 + \sqrt[3]{4}\,x + \sqrt[3]{16}$ ó $x^2 + a^2x + a^4$, cuyas raíces son imaginarias. El lado del cubo será $x = a^2$, ó si se quiere $x = \frac{a^2}{1}$, que se construye fácilmente con la línea irracional dada, a, y la unidad.

2.º *La trisección del ángulo.* Establezcamos ante todo la ecuación del problema, que será la $F(x) = 0$ de que hablábamos al exponer el método general.

La ecuación conocida

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cos b + \text{sen}\,b \cos a,$$

da, poniendo $b = 2a$,

$$\text{sen}\,3a = \text{sen}\,a \cos 2a + \text{sen}\,2a \cos a$$

y sucesivamente:

$$\text{sen } 3a = \text{sen } a\,(\cos^2 a - \text{sen}^2 a) + 2 \text{ sen } a \cos^2 a;$$

$$\text{sen } 3a = \text{sen } a\,(1 - 2 \text{ sen}^2 a) + 2 \text{ sen } a\,(1 - \text{sen}^2 a);$$

$$\text{sen}^3 a - \frac{3}{4} \text{ sen } a + \frac{\text{sen } 3a}{4} = 0.$$

El arco dado es $3a$, el que se busca a; y, representando el dato sen $3a$ por p y la incógnita sen a por x, tendremos como ecuación del problema:

$$x^3 - \frac{3}{4} x + \frac{p}{4} = 0.$$

1.° Veamos si esta ecuación es irreducible.

Poniendo $x = \frac{z}{2}$, para que todos los coeficientes sean enteros, tendremos

$$\frac{z^3}{8} - \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{2} + \frac{p}{4} = 0:$$

de donde

$$z^3 - 3z + 2p = 0.$$

Lo mismo que en el caso anterior, para ser reducible debe tener un factor de primer grado, racional: de manera que sólo podrán ser raíces suyas, 2, p, y $2p$, ó estas cantidades con signo negativo.

Ensayemos estas tres cantidades:

2 da $8 - 6 + 2p = 2 + 2p$: cantidad que sólo es nula para $p = -1$: es decir. para un arco de *tres cuadrantes* ó para *menos* un arco *de un cuadrante*.

La ecuación $x^3 - \frac{3}{4} x - \frac{1}{4}$, dividida por $x - 1$ (puesto que en $x = \frac{z}{2}$ á $z = 2$ corresponde $x = 1$) da $x^2 + x + \frac{1}{4}$, cuyas dos raíces iguales son $-\frac{1}{2}$: y, en efecto, las terceras partes buscadas son un *cuadrante*, determinado por $x=1$, y un arco de -30°, determinado por $x=-\frac{1}{2}$.

p da $p^3-3p+2p=p^3-p=p(p^2-1)$, que en general no es nulo: únicamente para $p=0$ ó $p=1$, es decir, para valores numéricos determinados, se reduce á cero: $p=1$ corresponde á un cuadrante, y este caso se sabe resolver y se comprueba con facilidad suma.

2 p da $8p^3-6p+2p=8p^3-4p=8p\left(p^2-\frac{1}{2}\right)$: cantidad distinta de cero, á no ser para $p=0$, ó para $p=\sqrt{\frac{1}{2}}$, que corresponde al arco de $45.^\circ$ Y, en efecto, en este caso el problema se resuelve con la recta y el círculo.

Lo mismo podríamos decir de los valores negativos.

2.° Resulta, pues, que la ecuación propuesta es irreducible; pero que, como su exponente 3 no está comprendido en 2^n, el problema no puede resolverse en general por la recta y el círculo.

3.° *Rectificación de la circunferencia (ó cuadratura del círculo).*—Hemos visto el procedimiento de Lindemann para demostrar que con rectas y circunferencias no puede combinarse una construcción que dé la longitud de una circunferencia cuyo radio se conoce; y, aunque dicho método no sea una aplicación directa ó inmediata del de Wantzel, puesto que el problema es por su naturaleza trascendente y no puede escribirse en una ecuación entera, cuyos coeficientes sean funciones racionales del radio, es lo cierto que Lindemann demuestra su teorema fundándose en que π no puede ser raíz de una ecuación algebráica irreducible, lo cual supone que toda incógnita de un problema, resoluble por la recta y el círculo, ha de ser precisamente raíz de una ecuación de esta clase: es decir, que Lindemann parte de la primera consecuencia de la teoría de Wantzel. Puede, pues, afirmarse que el método de Lindemann se funda en el método general de su predecesor.

4.° *Dado un ángulo recto y un punto en la bisectriz, tra-*

zar por él una recta tal, que determine en el ángulo recto un segmento igual á una magnitud dada. (fig. 4.ª)

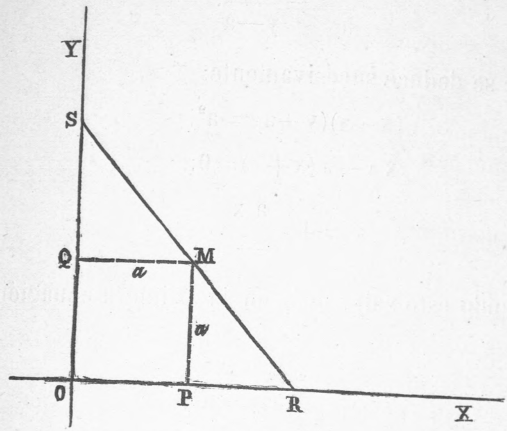

Figura 4.ª

Sean O R y O S dos rectas, que se cortan en ángulo recto, y M un punto tal que M P=M Q=a; y sea además m una longitud dada.

El problema consiste en trazar por M una recta tal que R S=m.

Formemos ante todo la ecuación del problema y tomemos por incógnita la longitud O R=x.

Y supongamos, para simplificar que:
M P=M Q=a;
O R=x, incógnita definitiva;
O S=y;
R S=m.

Tendremos, pues:

$$\overline{OR}^2+\overline{OS}^2=\overline{RS}^2$$

$$\frac{PR}{MP}=\frac{MQ}{QS}$$

ó bien:

$$x^2+y^2=m^2,$$

$$\frac{x-a}{a}=\frac{a}{y-a}.$$

De donde se deduce sucesivamente:

$$(x-a)(y-a)=a^2;$$

$$x\,y-a\,(x+y)=0;$$

$$y=+\frac{a\,x}{x-a}.$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación, resulta:

$$x^2+\frac{a^2\,x^2}{(a-x)^2}=m^2;$$

y, desarrollando:

$$(a-x)^2\,x^2+a^2x^2=m^2\,(a-x)^2;$$

$$x^4-2ax^3+(2a^2-m^2)x^2+2am^2x-a^2m^2=0.$$

Para simplificar una transformación posterior, pongamos $a=2\,b$, con lo cual la ecuación tomará la forma,

$$x^4-4bx^3+(8b^2-m^2)x^2+4bm^2x-4b^2m^2=0.$$

Haciendo desaparecer el segundo término, para lo cual pondremos $x=z+b$, resultará

$$\left.\begin{array}{r} z^4+4b\,z^3+6b^2z^2+4b^3z+b^4 \\ -4b\,(z^3+3b\,z^2+3b^2z+b^3) \\ +(8b^2-m^2)\,(z^2+2bz+b^2) \\ +4bm^2\,(z+b\,) \\ -4b^2\,m^2 \end{array}\right\}=0;$$

ó bien, ordenando:

$$\left.\begin{array}{r|r|l} z^4+6b^2 & z^2+4b^3 & z+b^4 \\ -12b^2 & -12b^3 & -4b^4 \\ +8b^2 & +16b^3 & +(8b^2-m^2)\,b^2 \\ -m^2 & -2bm^2 & +4b^2m^2 \\ & +4bm^2 & -4b^2m^2 \end{array}\right\}=0;$$

ó, en último extremo:

$$\begin{vmatrix} z^4+2b^2 & z^2+8b^3 & z+5b^4 \\ -m^2 & +2bm^2 & -m^2b^2 \end{vmatrix}=0. \quad (1)$$

Esta es la ecuación del problema, la cual depende de las dos magnitudes b y m.

1.° Debemos ante todo asegurarnos de que es una ecuación irreducible, ó, si no lo fuere, descomponerla en factores.

Las descomposiciones posibles serán, *primero:* en un factor de primer grado y otro de tercero; y, *segundo:* en dos factores de segundo grado.

Examinemos ambos casos. Si admite un factor de primer grado, su raíz será uno de los factores racionales del último término, el cual se descompone de este modo: $b^2(5b^2-m^2)$. Pero $5b^2-m^2$ es evidentemente irreducible, porque sus dos factores $(b\sqrt{5}-m)$ $(b\sqrt{5}+m)$ son irracionales; luego los factores irreducibles de dicha expresión serán b, b, $5b^2-m^2$, y los factores que en todo caso podrían ser raíces racionales de la ecuación en z, b, b^2, $5b^2-m^2$, $b(5b^2-m^2)$, $b^2(5b^2-m^2)$, y estas mismas cantidades con signo negativo: en suma, debemos ensayar 10 cantidades como raíces racionales *posibles* y *únicas* de la ecuación en z: b y b^2 es inútil sustituirlas en dicha ecuación (1), porque los términos que solo contienen b deben destruirse entre sí, y esto no es posible porque todos son positivos.

Respecto á las tres cantidades que siguen, lo más sencillo será aplicar el método general; á saber: dividir el último término de (1) por ellas; agregar á los cocientes el penúltimo coeficiente; dividir de nuevo por las supuestas raíces; y continuar así sucesivamente.

Estas operaciones se indican en el siguiente cuadro:

a): raíces supuestas:

$5b^2-m^2$; $b(5b^2-m^2)$; $b^2(5b^2-m^2)$

b): cocientes de la primera división·

b^2; b; 1

c): sumas con el coeficiente $8b^3+2bm^2$:

$8b^3+(b2m^2)b$; $8b^3+(1+2m^2)b$; $8b^3+2bm^2-1$

Y como ninguna de estas cantidades es divisible por la raíz correspondiente, pueden desecharse todas ellas.

Pasemos á ensayar

$-b, -b^2, -(5b^2-m^2), -b\,(5b^2-m^2)$, y $-b^2\,(5b^2-m^2)$

$-b$ anula todos los términos en b^4; pero los que contienen m^2b^2, como resultado de sustituir $-b$ por z, son todos negativos y se suman: de suerte que $-b$ no es raíz.

$-b^2$ da desde luego un término b^8, que no puede destruirse con ninguno: luego $-b^2$ tampoco es raíz.

Para ensayar como raíces las tres cantidades siguientes, aplicaremos el método general formando un cuadro análogo al anterior.

a):	$-(5b^2-m^2)$;	$-b\,(5b^2-m^2)$;	$-b^2(5\,b^2-m^2)$
b):	$-b^2$;	$-b$;	-1
c):	$8b^3-b^2+2bm^2$;	$8b^3+(2m^2-1)b$;	$8b^3+2bm^2-1$.

Y como ninguna de estas cantidades es divisible por la raíz supuesta correspondiente, podemos desecharlas todas.

Con esto queda demostrado que la ecuación (1) no admite ningún factor lineal $z-\alpha$, en que α sea función entera y racional de b y m.

Pasemos á los factores de segundo grado.

Sean estos z^2+Az+B y $z^2+A'z+B'$; y veamos si es posible determinar para A, B, A', B' funciones racionales y enteras de b y m.

Efectuando el producto. $(z^2+Az+B)\,(z^2+A'z+B')=z^4+(A+A')\,z^3+(B+B'+AA')\,z^2+(AB'+A'B)\,z+BB'$, é identificando con la ecuación (1), tendremos el sistema:

$$A+A'=0,$$
$$B+B'+AA'=2\,b^2-m^2,$$
$$AB'+A'B=8\,b^3+2bm^2,$$
$$B\,B'=5b^4-m^2b^2:$$

ó bien sustituyendo $A'=-A$ en las tres últimas:

$$B+B'-A^2=2b^2-m^2$$
$$B-B'=\frac{8b^3+2bm^2}{A}$$
$$B\,B'=5b^4-m^2b^2$$

Despejando B y B′ de las dos primeras y sustituyendo en la tercera, tendremos la ecuación de sexto grado:

$$A^6 + 2(2b^2 - m^2)A^4 + [(2b^2 - m^2)^2 - 4(5b^4 - m^2b^2)]A^2 - (8b^3 + 2bm^2)^2 = 0:$$

y es preciso ver si A admite valores racionales en m y b.

Podríamos seguir el método general; pero, á fin de exponer uno de los varios medios que hay de simplificar la solución de estos problemas, emplearemos un artificio sencillísimo, que en ningún autor hemos visto empleado, y que es muy rápido y muy fecundo.

Si la ecuación anterior admite por raíz una función entera de b y m, para valores numéricos y enteros de estas cantidades la raíz de la ecuación que resulte será un número entero: luego, en el caso de dar á b y m valores numéricos y no admitir la nueva ecuación raíces enteras, tampoco admitiría la propuesta funciones enteras de b y m como raíces. Si lo contrario sucediese, nada podría deducirse, y sería preciso emplear otros números de ensayo.

Pongamos en la ecuación en A, por ejemplo $b=1$, $m=1$, y resultará.

$$A^6 + 2A^4 - 15A^2 - 100 = 0.$$

Si esta ecuación admite raíces enteras, éstas sólo podrán ser 1, 4, 25, 100; y, como ninguna de ellas lo es, resulta que en el *caso particular* que indica la ecuación última, no hay raíces enteras: de donde se deduce que tampoco las hay algebráicas enteras en la *ecuación general*.

Hemos probado plenamente que la ecuación en z (1) es irreducible.

Pero su exponente 4 está comprendido en la expresión 2^n: luego no aparece imposibilidad inmediata de que el problema pueda resolverse por la recta y el círculo.

Será preciso emplear el método general ya expuesto, y ante todo deducir la forma de la ecuación final en x_n para compararla con la ecuación (1) en z.

Puesto que la ecuación es de 4.° grado, sólo dos de las ecuaciones generales debemos emplear. Sean estas:

$$x_1^2+Ax_1+B=0,$$

$$x_2^2+A_1x_2+x_1=0.$$

Dando á A_1 la forma ax_1+a', según indica el método general, tendremos:

$$x_1^2+Ax_1+B=0,$$

$$x_2^2+(ax_1+a')x_2+x_1=0,$$

O, recordando que hemos representado la incógnita final del problema por z:

$$x_1^2+Ax_1+B=0,$$

$$z^2+(ax_1+a')z+x_1=0.$$

Despejando x_1 de la última, tendremos:

$$x_1=-\frac{z^2+a'z}{az+1};$$

y, sustituyendo en la anterior:

$$\left(\frac{z^2+a'z}{az+1}\right)^2+A\times-\frac{z^2+a'z}{az+1}+B=0.$$

De donde necesariamente se deduce:

$$z^4+(2a'-Aa)z^3+(a'^2-Aaa'-A+Ba^2)z^2+(2Ba-Aa')z+B=0. \qquad (2)$$

Si, para simplificar, representamos en la ecuación (1), que es la del problema,

$$z^4+\left.\begin{matrix}2b^2\\-m^2\end{matrix}\right|z^2+\left.\begin{matrix}8b^3\\+2bm^2\end{matrix}\right|z+\left.\begin{matrix}5b^4\\-m^2b^2\end{matrix}\right|=0, \qquad (1)$$

los coeficientes por una sola letra, á la ecuación (1) podremos sustituir esta otra:

$$z^4+pz^2+qz+r=0 \qquad (1')$$

en la cual $p=2b^2-m^2$, $q=8b^3+2bm^2$, $r=5b^4-m^2b^2$.

Identificando las ecuaciones (1') y (2), la primera que es la del problema, y la segunda que debe ser esta misma, en la hipótesis de que el problema sea posible con la recta y la circunferencia, tendremos las siguientes ecuaciones de condición:

$$\left.\begin{array}{l} 2a'-Aa=0 \\ a'^2-Aaa'-A+Ba^2=p \\ 2Ba-Aa'=q \\ B=r. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Todo queda reducido á ver si es posible determinar A, B, a, a' en función racional de b y m, que son los datos del problema.

Poniendo el valor $B=r$ en la tercera, ésta y la primera forman el siguiente grupo:

$$2a'-Aa=0$$
$$2ar-Aa'=q$$

De donde podremos deducir los siguientes valores de a y a', en función de A:

$$a=\frac{2q}{4r-A^2}\,;\ a'=\frac{Aq}{4r-A^2}$$

Y, sustituyendo en la 2.ª ecuación del sistema, y además $B=r$,

$$\left(\frac{Aq}{4r-A^2}\right)^2-A\,\frac{2q^2A}{(4r-A^2)^2}-A+r\left(\frac{2q}{4r-A^2}\right)^2=p.$$

Desarrollando se obtiene:

$$A^2q^2-2A^2q^2-A\,(4r-A^2)^2+4q^2r=p(4r-A^2)^2:$$

y simplificando:

$$q^2(4r-A^2)=(p+A)\,(4r-A^2)^2,$$

ó bien, suprimiendo el factor $4r-A^2$, que da para A el valor irracional $A=2\sqrt{r}$, tendremos, finalmente:

$$q^2=(p+A)\,(4r-A^2),$$

ó sea la ecuación de 3.er grado en A

$$A^3+pA^2-4rA+q^2-4pr=0.$$

En resumen, el grupo de condiciones (3), que expresa la posibilidad de sustituir á la ecuación en z del problema un