$(1)^2_k \dots (1)^n_k$, sin que deje de ser lineal la expresión que resulte.

Tendremos, pues,

$$m^i_k = U^i_0 (1)^0_k + U^i_1 (1)^1_k + U^i_2 (1)^2_k + \dots + U^i_n (1)^n_k \qquad (4')$$

siendo los coeficientes U funciones enteras y de coeficientes enteros de las raíces de (α).

Sin detenernos á determinar la forma de las funciones U, podemos demostrar una propiedad importante de dichos coeficientes.

Teorema. Si en la ecuación anterior damos á i los $n+1$ valores 0, 1, 2, 3... n, tendremos estas $n+1$ ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} m^0_k = U^0_0 (1)^0_k + U^0_1 (1)^1_k + U^0_2 (1)^2_k + \dots + U^0_n (1)^n_k \\ m^1_k = U^1_0 (1)^0_k + U^1_1 (1)^1_k + U^1_2 (1)^2_k + \dots + U^1_n (1)^n_k \\ m^2_k = U^2_0 (1)^0_k + U^2_1 (1)^1_k + U^2_2 (1)^2_k + \dots + U^2_n (1)^n_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m^n_k = U^n_0 (1)^0_k + U^n_1 (1)^1_k + U^n_2 (1)^2_k + \dots + U^n_n (1)^n_k \end{array}\right. \qquad (5)$$

y el teorema consiste en que la determinante de los coeficientes U es igual á $\delta^{2(m-1)}$, siendo como antes

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ z^2_0 & z^2_1 & \dots & z^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^n_0 & z^n_1 & \dots & z^n_n \end{vmatrix} :$$

es decir, que debemos demostrar la siguiente relación:

$$\begin{vmatrix} U^0_0 & U^0_1 & \dots & U^0_n \\ U^1_0 & U^1_1 & \dots & U^1_n \\ U^2_0 & U^2_1 & \dots & U^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U^n_0 & U^n_1 & \dots & U^n_n \end{vmatrix} = \delta^{2(m-1)} \qquad (5')$$

Demostración. La determinante anterior es el denominador común de los valores de $(1)_k^0$, $(1)_k^1$..... deducidos de las ecuaciones (5); y así todo queda reducido á obtener dichas cantidades $(1)_k^0$, etc. por dos procedimientos:

1.° Despejando de las expresadas ecuaciones (5).

2.° Partiendo de la ecuación (4), en la que haremos i igual á 0, 1, 2, 3, ... n, sucesivamente.

Tendremos, pues:

$$m_k^0 = \Phi(z_0, z_0)(m-1)_k^0 + \Phi(z_1, z_0)(m-1)_k^1 + \Phi(z_2, z_0)\, m-1)_k^2 + \dots$$
$$+ \Phi(z_n, z_0)(m-1)_k^n$$

$$m_k^1 = \Phi(z_0, z_1)(m-1)_k^0 + \Phi(z_1, z_1)(m-1)_k^1 + \Phi(z_2, z_1)(m-1)_k^2 + \dots$$
$$+ \Phi(z_n, z_1)(m-1)_k^n$$

$$m_k^2 = \Phi(z_0, z_2)(m-1)_k^0 + \Phi\, z_1, z_2)(m-1)_k^1 + \Phi(z_2, z_2)(m-1)_k^2 + \dots$$
$$+ \Phi(z_n, z_2)(m-1)_k^n$$

....

$$m_k^n = \Phi(z_0, z_n)(m-1)_k^0 + \Phi(z_1, z_n)(m-1)_k^1 + \Phi(z_2, z_n)(m-1)_k^2 + \dots$$
$$+ \Phi(z_n, z_n)(m-1)_k^n.$$

Despejando las (m—1), el denominador común será la determinante de las Φ: precisamente la de la fórmula (3), cuyo valor es δ^2; de donde resulta, llamando A_0, A_1, A_2, ... A_n á los numeradores,

$$(m-1)_k^0 = \frac{A_0}{\delta^2};\ (m-1)_k^1 = \frac{A_1}{\delta^2};\ (m-1)_k^2 = \frac{A_2}{\delta^2} \dots (m-1)_k^n = \frac{A_n}{\delta^2}.$$

Y expresando las (m—1) en función de las (m—2) por la fórmula general (4), obtendremos el sistema siguiente:

$$\frac{A_0}{\delta^2}=(m-1)^{0}_{k}=\Phi(z_0,z_0)\,(m-2)^{0}_{k}+\Phi(z_1,z_0)\,(m-2)^{1}_{k}+\ldots+\Phi(z_n,z_0)\,(m-2)^{n}_{k}$$

$$\frac{A_1}{\delta^2}=(m-1)^{1}_{k}=\Phi(z_0,z_1)\,(m-2)^{0}_{k}+\Phi(z_1,z_1)\,(m-2)^{1}_{k}+\ldots+\Phi(z_n,z_1)\,(m-2)^{n}_{k}$$

$$\frac{A_2}{\delta_2}=(m-1)^{2}_{k}=\Phi(z_0,z_2)\,(m-2)^{0}_{k}+\Phi(z_1,z_2)\,(m-2)^{1}_{k}+\ldots+\Phi(z_n,z_2)\,(m-2)^{n}_{k}$$

....

$$\frac{A_n}{\delta^2}=(m-1)^{n}_{k}=\Phi(z_0,z_n)\,(m-2)^{0}_{k}+\Phi(z_1,z_n)\,(m-2)^{1}_{k}+\ldots+\Phi(z_n,z_n)\,(m-2)^{n}_{k}.$$

Despejando de los anteriores las $(m-2)$, el denominador común será la determinante de las Φ, es decir, δ^2; y como en el numerador, que será de forma fraccionaria, existe un denominador δ^2, tendremos, representando por B_0, B_1, B_2,.... B_n, los numeradores

$$(m-2)^{0}_{k}=\frac{B_0}{(\delta^2)^2};\ (m-2)^{1}_{k}=\frac{B_1}{(\delta^2)^2};\ (m-2)^{2}_{k}=\frac{B_2}{(\delta^2)^2};\ldots(m-2)^{n}_{k}=\frac{B_n}{(\delta^2)^2}.$$

Siguiendo el mismo procedimiento, es decir, poniendo los valores de $(m-2)$ en función de $(m-3)$, despejando estas cantidades y representando por C_0, C_1, C_2,... C_n los numeradores, hallaremos:

$$(m-3)^{0}_{k}=\frac{C_0}{(\delta^2)^3};\ (m-3)^{1}_{k}=\frac{C_1}{(\delta^2)^3};\ (m-3)^{2}_{k}=\frac{C_2}{(\delta^2)^3};\ldots\ldots;\ (m-3)^{n}_{k}=\frac{C_n}{(\delta^2)^3}$$

Y continuando de esta manera, y disminuyendo *m* de unidad en unidad, hasta llegar á (1), tendremos

$$(1)^{0}_{k}=\frac{M_0}{(\delta^2)^{m-1}};\ (1)^{1}_{k}=\frac{M_1}{(\delta^2)^{m-1}};\ (1)^{2}_{k}=\frac{M_2}{(\delta^2)^{m-1}};\ \ldots\ (1)^{n}_{k}=\frac{M_n}{(\delta^2)^{m-1}}.$$

Estos valores deben ser idénticos á los que se deducen de las ecuaciones (5), y como no se ha efectuado ninguna simplificación, los denominadores deben ser iguales; pero el de las expresiones anteriores es $(\delta^2)^{m-1}=\delta^{2\,(m-1)}$, y el de los valores que se deducen de las ecuaciones (5) es la determinante de las U: luego tendremos:

$$\begin{vmatrix} U^0_0 & U^0_1 & \dots & U^0_n \\ U^1_0 & U^1_1 & \dots & U^1_u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U^n_0 & U^n_1 & \dots & U^n_n \end{vmatrix} = \delta^{2(m-1)}$$

que es precisamente el teorema propuesto.

VALORES DE LAS CANTIDADES $(1)^i_k$.

Haciendo $m=o$ en la ecuación general (2), se obtiene la particular (2''')

$$\frac{zf(z)}{z-z_i} = \varphi(z, z_i) - \frac{d\,\varphi(z, z_i)}{dz}; \qquad (2''')$$

y representando por φ la función general Φ, y multiplicando por $e^{-z}dz$, resulta:

$$\frac{e^{-z}zf(z)}{z-z_i}\,dz = e^{-z}\,\varphi(z, z_i)\,dz - e^{-z}\,\frac{d\,\varphi(z, z_i)}{dz}\,dz = -d\left[e^{-z}\varphi(z, z_i)\right]:$$

é integrando entre 0 y z_k, raíz de (α):

$$\int_0^{z_k} \frac{e^{-z}\,z\,f(z)}{z-z_i}\,dz = (1)^i_k = -\left[e^{-z}\,\varphi(z, z_i)\right]_0^{z_k} = \varphi(z_0, z_i) - e^{-z_k}\,\varphi(z_k\ z_i)$$

Es decir: $$(1)^i_k = \varphi(z_0, z_i) - e^{-z_k}\varphi(z_k, z_i). \qquad (6)$$

FÓRMULA FUNDAMENTAL DE HERMITE.

Si en la fórmula (4')

$$(m)_k^i = U_0^i (1)_k^0 + U_1^i (1)_k^1 + U_2^i (1)_k^2 + \dots U_n^i (1)_k^n \qquad (4')$$

ponemos los valores de las cantidades $(1)_k^i$ deducidos de la (6), es decir:

$$(1)_k^0 = \varphi(z_0, z_0) - e^{-z_k} \varphi(z_k, z_0)$$
$$(1)_k^1 = \varphi(z_0, z_1) - e^{-z_k} \varphi(z_k, z_1)$$
$$(1)_k^2 = \varphi(z_0, z_2) - e^{-z_k} \varphi(z_k, z_2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(1)_k^n = \varphi(z_0, z_n) - e^{-z_k} \varphi(z_k, z_n)$$

resultará:

$$(m)_k^i = U_0^i \left[\varphi(z_0, z_0) - e^{-z_k} \varphi(z_k, z_0) \right] + U_1^i \left[\varphi(z_0, z_1) - e^{-z_k} \varphi(z_k, z_1) \right]$$
$$+ U_2^i \left[\varphi(z_0, z_2) - e^{-z_k} \varphi(z_k, z_2) \right] + \dots + U_n^i \left[\varphi(z_0, z_n) - e^{-z_k} \varphi(z_n, z_n) \right];$$

Y, ordenando esta expresión de otro modo, tendremos:

$$(m)_k^i = \left[U_0^i \varphi(z_0, z_0) + U_1^i \varphi(z_0, z_1) + U_2^i \varphi(z_0, z_2) + \dots + U_n^i \varphi(z_0, z_n) \right]$$
$$- e^{-z_k} \left[U_0^i \varphi(z_k, z_0) + U_1^i \varphi(z_k, z_1) + U_2^i \varphi(z_k\, z_2) + \dots + U_n^i \varphi(z_k, z_n) \right].$$

Si, en general, representamos por u el polinomio de los paréntesis, lo cual es legítimo, pues la forma es la misma para ambos; ponemos además á u un subíndice que indique la z que entra en primer lugar en φ; y un índice superior que indique la z que entra en las cantidades U, obtendremos en forma abreviada:

$$(m)^{i}_{k} = u^{i}_{0} - e^{-z_k} u^{i}_{k} \quad (7)$$

que es la fórmula fundamental de Hermite.

En esta fórmula debemos recordar siempre:

1.° Que m^{i}_{k} representa el valor de la integral $\frac{1}{(1.2\ldots m-1)} \times$ $\int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m(z)\, dz}{z - z_i}$: de suerte que k indica la raíz z_k del límite superior, é *i* cuál es la raíz que entra en el denominador.

2.° Que la forma general de u es

$$u^{i}_{h} = U^{i}_{0} \varphi(z_h, z_0) + U^{i}_{1} \varphi(z_h, z_1) + \ldots + U^{1}_{n} \varphi(z_h, z_n),$$

siendo las U los coeficientes de $(1)^{0}_{k}$, $(1)^{1}_{k}$, ... $(1)^{n}_{k}$ en el valor de m^{i}_{k}, de la fórmula (4').

3.° Que las cantidades u son *funciones enteras* y de *coeficientes enteros* de las raíces de f(z)=0 (α).

Esto es evidente, dada la forma del valor de U^{i}_{k}, y lo que hemos dicho de las U y las φ.

Sólo nos quedan dos teoremas por exponer para completar esta parte preparatoria del trabajo de Lindemann.

Teorema. La determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} u^{0}_{0} & u^{0}_{1} & \ldots & u^{0}_{n} \\ u^{1}_{0} & u^{1}_{1} & \ldots & u^{1}_{n} \\ u^{2}_{0} & u^{2}_{1} & \ldots & u^{2}_{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u^{n}_{0} & u^{n}_{1} & \ldots & u^{n}_{n} \end{vmatrix}$$

es igual á δ^{2m}: es decir, $\Delta = \delta^{2m}$.

Demostración. Basta para convencerse de ello poner por las cantidades u sus valores en Δ.

Resultará:

$$\Delta=\begin{vmatrix} U^0_0\varphi(z_0,z_0)+U^0_1\varphi(z_0,z_1)+..+U^0_n\varphi(z_0,z_n), \ldots\ldots & U^0_0\varphi(z_n,z_0)+U^0_1\varphi(z_n\,z_1)+..+U^0_n\varphi(z_n,z_n) \\ U^1_0\varphi(z_0,z_0)+U^1_1\varphi(z_0,z_1)+..+U^1_n\varphi(z_0\,z_n), \ldots\ldots & U^1_0\varphi(z_n,z_0)+U^1_1\varphi(z_n,z_1)+..+U^1_n\varphi(z_n,z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U^n_0\varphi(z_0,z_0)+U^n_1\varphi(z_0,z_1)+..+U^n_n\varphi\, z_0,z_n), \ldots\ldots & U^n_0\varphi(z_n,z_0)+U^n_1\varphi(z_n,z_1)+..+U^n_n\varphi(z_n,z_n) \end{vmatrix}$$

Pero esta determinante es el producto de las dos determinantes (3') y (5'), en que se han multiplicado horizontales de la segunda por verticales de la primera para formar horizontales del producto: así, pues,

$$\Delta=\begin{vmatrix} \varphi(z_0,z_0) & \ldots & \varphi(z_n,z_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi(z_0,z_n & \ldots & \varphi(z_n,z_n) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U^0_0 & \ldots & U^0_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U^n_0 & \ldots & U^n_n \end{vmatrix},$$

y poniendo los valores de ambas determinantes según las fórmulas citadas (3') y (5')

$$\Delta=\delta^2\times\delta^{2(m-1)}=\delta^{2m},$$

que constituye el teorema de que nos ocupamos.

Teorema. La integral m^i_k tiende hacia cero á medida que m crece; y, para $m=\infty$, m^i_k es igual á cero rigorosamente.

Demostración. Como el módulo de una suma es inferior á la suma de los módulos, el módulo de

$$m^i_k=\frac{1}{1.2\ldots(m-1)}\int_0^{z_k}\frac{e^{-z}z^m f^m(z)\,dz}{z-z_i}$$

será inferior á la suma de los módulos de los elementos.

Representando: 1.° Por μ' el módulo de z f (z) para cualquier punto de la curva de integración: cantidad finita puesto que z lo es y f (z) es entera en z;

2.° Por ν' el módulo de $e^{-z}(z-z_i)^{-1}$: cantidad que también será finita, pues la curva de integración, que es arbitraria, no necesita pasar por z_i; y

3.° Por $d\lambda'$ la longitud de un arco infinitamente pequeño de la curva de integración, tendremos que el módulo de un elemento de la integral será:

$$\text{mod}\left[zf(z)\right]^m \times \text{mod}\left(e^{-z}(z-z_i)^{-1}\right] \times d\lambda' = \mu'^m \nu' d\lambda';$$

y, por lo tanto, $\text{mod}\ m^i_k < \int_0^{z_k} \frac{\mu'^m \nu' d\lambda'}{1.2..(m-1)}$.

Tomando los mayores valores de μ' y ν' en la curva de integración y representándolos por μ_1 y ν_1, se verificará la desigualdad

$$\text{mod}\ m^i_k < \frac{\mu_1^m \nu_1}{1.2..(m-1)} \int_0^{z_k} d\lambda';$$

ó bien

$$\text{mod}\ m^i_k < \frac{\mu_1^m \nu_1 \lambda'}{1....(m-1)}.$$

Y si, haciendo todas las combinaciones posibles de los índices k é i, representamos los máximos valores de μ_1, ν_1, y λ', por μ, ν, λ, todavía tendremos, con más razón aún:

$$\text{mod}\ m^i_k < \frac{\mu^m \nu \lambda}{1.2..(m-1)}$$

ó bien

$$\text{mod}\ m^i_k < \left[\frac{\mu^{m-1}}{1.2..(m-1)}\right] \mu\nu\lambda$$

La cantidad $\mu\nu\lambda$ es finita y constante, y $\frac{\mu^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}$ tiende á cero, á medida que m crece. Luego

$$\lim.\ \mathrm{mod}\ m_k^i = 0:$$

lo cual prueba que m_k^i tiende hacia cero, pues una imaginaria se anula cuando se anula su módulo.

Con estos precedentes podemos pasar á la demostración del teorema de Lindemann.

TEOREMA DE LINDEMANN.

Sea la ecuación

$$\psi(z) = z^p + b_1 z^{p-1} + b_2 z^{p-2} + \ldots\ldots + b_p = 0,$$

que supondremos irreducible y cuyos coeficientes b_1, b_2, b_3, ..., b_p son *números* enteros, reales ó imaginarios; es decir, de la forma general $r + s\sqrt{-1}$, en la cual r y s representan números enteros.

1.° Formemos la ecuación de la suma de las raíces de dos en dos: $z_1 + z_2$, $z_1 + z_3$,.....: cuyo grado será $\frac{p(p-1)}{1.2} = p_2$

Sea esta ecuación $S_2(Z_2) = 0$: en la cual con el subíndice 2 significamos que Z_2 es raíz de la ecuación de las sumas dos á dos.

Supongamos para simplificar la demostración que la ecuación $S_2(Z_2) = 0$ es irreducible, que no tiene raíces iguales, y que ninguna de las raíces Z_2', Z_2'', Z_2'''..... de esta ecuación es igual á otra de la propuesta $\psi(z)$, ó á una de la serie z_1, z_2, z_3, ..., z_p.

Ya tendremos en cuenta, para completar la teoría, las restricciones precedentes.

2.° Formemos la ecuación de las sumas de las raíces z_1, z_2, $z_3 .. z_p$, tomadas tres á tres: su grado será $p \frac{(p-1)(p-1)}{1.2.3.} = p_3$.

Sea esta ecuación $S_3 (Z_3) = 0$: en la cual el subíndice 3 recuerda que Z_3 es raíz de la ecuación de las sumas de las raíces de la ecuación primitiva, tomadas de tres en tres.

Y supongamos, lo mismo que antes, que la ecuación $S_3 (Z_3) = 0$ es irreducible, que no tiene raíces iguales, y que ninguna de sus raíces Z_3', Z_3'', Z_3'''..... es igual á otra de las dos series precedentes:

$$z_1, \; z_2, \; z_3, \; ..... \; z_p$$

$$Z_2', Z_2'', Z_2''', ... Z_2^{(p_2)}$$

3.° Formemos del mismo modo, y con análogas restricciones, la ecuación

$$S_4 (Z_4) = 0$$

de las sumas de las raíces z_1, z_2, z_3 ... z_p tomadas 4 á 4, que será del grado p_4; la ecuación análoga

$$S_5 (Z_5) = 0;$$

y, por último, siguiendo de este modo, la ecuación

$$S_p (Z_p) = 0,$$

que en rigor será

$$Z_p + b_1 = 0.$$

Y 4.° Consideremos la relación general de Hermite,

$$m_k^i = u_0^i - e^{-z_k} u_k^i,$$

puesta bajo la forma

$$e^{z_k} m_k^i = e^{z_k} u_0^i - u_k^i, \qquad (1)$$

y apliquémosla á la ecuación compuesta

$$\psi . S_2 . S_3 . S_4 ..... S_p = \Psi = 0,$$

que será del grado

$$p + p_2 + p_3 + ... 1 = P, \qquad (1')$$

y cuyas raíces serán
$$\left.\begin{array}{l} z_1,\ z_2,\ z_3, \ldots z_p \\ Z_2', Z_2'', Z_2''', \ldots . Z_2^{(p_2)}, \\ Z_3', Z_3'', Z_2''', \ldots . Z_3^{(p_3)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_p \end{array}\right\} \quad (2)$$

Entre estos números, ó raíces, según las restricciones indicadas, no hay dos iguales.

La ecuación (1), tanto respecto al índice i, como al índice k, puede aplicarse á las raíces del grupo (2); debiendo advertirse que la relación (1) es de doble entrada, y que podrá aplicarse respecto á ambos índices i y k, desde 0 á P, ó sea para P + 1 valores.

En rigor podría representarse cualquiera de las cantidades (2) por una misma letra X, poniéndole subíndices; y así tendríamos X_0, X_1, X_2..... X_P en vez del grupo (2), y la notación sería análoga á la del Teorema de Hermite: lo que allí eran z_0, z_1, z_2,..... aquí serían X_0, X_1, X_2..... Apliquemos la relación (1) á las raíces de $\psi = 0$, ó sea á las raíces z, que son las del primer factor de la ecuación $\Psi = 0$; y cada raíz z_1, z_2, z_3..... z_p dará una ecuación análoga á la (1). Pero esta aplicación se hace respecto á los valores de z, que corresponden al subíndice k, dejando indeterminado el índice i, que puede referirse á cualquier raíz X, ó sea del grupo (2).

Sumando todas estas ecuaciones, tendremos

$$\Sigma\, e^{z_k} m_k^i = u_0^i \Sigma\, e^{z_k} - \Sigma\, u_k^i :$$

las *sumas* se refieren á las p raíces z_1, z_2..... de ψ.

Del mismo modo, aplicando la relación (1) á las p_2 raíces de S_2 (Z_2), respecto al índice k, pero dejando á la raíz, que corresponde al índice i, el mismo valor que antes, y sumando después la p_2 ecuaciones que resultan, tendremos:

$$\Sigma\, e^{Z_2} m_{(Z_2)}^i = u_0^i \Sigma\, e^{Z_2} - \Sigma\, u_{(Z_2)}^i :$$

las sumas se refieren á las p_2 raíces $Z_2' Z_2''$, ..., de S_2: por eso en

u_k^i en vez del subíndice k hemos puesto (Z_2). Así como en la ecuación anterior cada Σ tenía p términos, en esta cada Σ comprende p_2 términos, uno por cada raíz de S_2. E igualmente formaremos una ecuación análoga á las anteriores para cada grupo de raíces de $S_3 = 0$, $S_4 = 0$, ... $S_p = 0$.

Tendremos por lo tanto el cuadro siguiente, como aplicación de la ecuación (1) á cada factor de $\Psi = 0$. Advirtiendo que las u se refieren á dicha ecuación compuesta, cuyas raíces son las del grupo (2), ó si se quiere á las raíces X_0, X_1, X_2,..... XP, que son las mismas del grupo (2), con indices ordenados de 0 á P.

He aquí el cuadro de ecuaciones á que nos referimos.

$$N_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma e^{z_k} m_k^i = u_0^i \Sigma e^{z_k} - \Sigma u_k^i .$$

Cada *sigma* tiene un término por cada raíz z_1, z_2..... z_p: en total p términos.

$$N_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma e^{Z_2} m_{(Z_2)}^i = u_0^i \Sigma e^{Z_2} - \Sigma u_{(Z_2)}^i .$$

Cada Σ tiene un término por cada raíz de $S_2 = 0$: en total p_2 términos.

$$N_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma e^{Z_3} m_{(Z_3)}^i = u_0^i \Sigma e^{Z_3} - \Sigma u_{(Z_2)}^i .$$

Cada Σ tiene un término por cada raíz de $S_3 = 0$: en total p_3 términos.

....

$$N_p \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma e^{Z_p} m_{(Z_p)}^i = u_0^i \Sigma e^{Z_p} - \Sigma e\, u_{(Z_p)}^i .$$

Cada *sigma* sólo tiene un término, porque $S_p = 0$ sólo posee una raíz.

De los índices y subíndices i y k de la ecuación (1) el segundo ya está determinado: el primero i puede ser cualquiera desde 0 á P; ó, de otro modo, la raíz correspondiente puede ser cualquiera de las P cantidades del grupo (2) y además $X_0 = 0$.

Multiplicando cada ecuación por N_1, N_2, N_3, N_4..... N_p, que hasta ahora son arbitrarios y que tomaremos como más nos convenga, y sumando los resultados, concluiremos que

$$N_1 \Sigma e^{z_k} m^i_k + N_2 \Sigma e^{Z_2} m^i_{(Z_2)} + N_3 \Sigma e^{Z_2} m^i_{(Z_3)} + \ldots + N_p \Sigma e^{Z_p} m^i_{(Z_p)}$$

$$= u^i_0 \left[N_1 \Sigma e^{z_k} + N_2 \Sigma e^{Z_2} + N_3 \Sigma e^{Z_3} + \ldots + N_p \Sigma e^{Z_p} \right] -$$

$$- \left[N_1 \Sigma u^i_k + N_2 \Sigma u^i_{(Z_2)} + N_3 \Sigma u^i_{(Z_3)} + \ldots + N_p \Sigma u^i_{(Z_p)} \right] \quad (3)$$

Y ahora vamos á demostrar, por reducción al absurdo, que jamás puede existir una relación lineal con coeficientes enteros entre

$$\Sigma e^{z}, \Sigma e^{Z_2}, \Sigma e^{Z_3} \ldots\ldots \Sigma e^{Z_p}:$$

es decir entre

$$\Sigma e^{z}, \Sigma e^{z_1 + z_2}, \Sigma e^{z_1 + z_2 + z_3}, \ldots \Sigma e^{z_1 + z_2 + z_3 \ldots\ldots + z_p}$$

En efecto: supongamos que existe y sea

$$N_0 + N_1 \Sigma e^{z} + N_2 \Sigma e^{Z_2} + N_3 \Sigma e^{Z_3} + \ldots\ldots + N_p \Sigma e^{Z_p} = 0. \quad (3')$$

Estos mismos números enteros N_1, N_2, N_3 ... N_p serán los que tomaremos para formar la ecuación (3), y de aquí hemos de deducir un absurdo, que demuestre la imposibilidad de la hipótesis (3').

Sustituyendo en (3) el valor del primer paréntesis del segundo miembro, deducido de (3'), tendremos

$$N_1 \Sigma e^{z_k} m^i_k + N_2 \Sigma e^{Z_2} m^i_{(Z_2)} + N_3 \Sigma e^{Z_3} m^i_{(Z_3)} + \ldots + N_p \Sigma e^{Z_p} m^i_{(Z_p)}$$

$$= - \left[N_0 u^i_0 + N_1 \Sigma u^i_k + N_2 \Sigma u^i_{(Z_2)} + N_3 \Sigma u^i_{(Z_3)} + \ldots + N_p \Sigma u^i_{(Z_p)} \right] \quad (3'')$$

Pero el índice i es cualquiera de la serie 0, 1, 2 ... P: luego, poniendo por i todos estos valores, tendremos $P+1$ ecuaciones, ó una por cada raíz de $\Psi = 0$, y además una para $X_0 = 0$, según la convención del teorema de Hermite $(z_0 = 0)$.

Representando para abreviar por A el primer miembro, y poniendo á la A un subíndice, que indique el valor de i á que se refiere, tendremos las $P+1$ ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}
A_0 = -\left[N_0 u_0^{0} + N_1 \Sigma u_k^{0} + N_2 \Sigma u^{0}_{(Z_2)} + N_3 \Sigma u^{0}_{(Z_3)} + \ldots + N_p \Sigma u^{0}_{(Z_p)}\right], \\
A_1 = -\left[N_0 u_0^{1} + N_1 \Sigma u_k^{1} + N_2 \Sigma u^{1}_{(Z_2)} + N_3 \Sigma u^{1}_{(Z_3)} + \ldots + N_p \Sigma u^{1}_{(Z_p)}\right], \\
A_2 = -\left[N_0 u_0^{2} + N_1 \Sigma u_k^{2} + N_2 \Sigma u^{2}_{(Z_2)} + N_3 \Sigma u^{2}_{(Z_3)} + \ldots + N_p \Sigma u^{2}_{(Z_p)}\right], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_i = -\left[N_0 u_0^{i} + N_1 \Sigma u_k^{i} + N_2 \Sigma u^{i}_{(Z_2)} + N_2 \Sigma u^{i}_{(Z_3)} + \ldots + N_p \Sigma u^{i}_{(Z_p)}\right], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
AP = -\left[N_0 u_0^{P} + N_1 \Sigma u_k^{P} + N_2 \Sigma u^{P}_{(Z_2)} + N_3 \Sigma u^{P}_{(Z_3)} + \ldots + N_p \Sigma u^{P}_{(Z_p)}\right].
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Ya se entiende que las u llevan índices y subíndices, y no exponentes.

Los primeros miembros, A_0, A_1,... A_p, de todas estas ecuaciones contienen en todos sus términos las integrales m_r^s del teorema de Hermite: de suerte que, si suponemos que m crece, todos aquellos primeros miembros tienden hacia *cero*. Esto prueba, por el pronto, que los segundos miembros también *tienden á cero*; pero no prueba todavía que como iguales á cero deban en rigor considerarse.

Fijemos bien las ideas.

En los segundos miembros no entra al parecer el número m; y, sin embargo, estos segundos miembros dependen de m, y varían con él, y hasta lo contienen.

En ellos, en efecto, entran las u; y éstas dependen de las U; y las U, según su sistema de formación, dependen de m.

Directamente entran y además por su combinación: es decir, de dos modos.

En efecto, para deducir de la ecuación

$$\overset{i}{m}_k = \Phi(z_0, z_i)\,\overset{0}{(m-1)}_k + \Phi(z_1, z_i)\,\overset{1}{(m-1)}_k + \Phi(z_2, z_i)\,\overset{2}{(m-1)}_k + \\ + \ldots.. \Phi(z_n, z_i)\,\overset{n}{(m-1)}_k,$$

los valores de las U en la ecuación final

$$\overset{i}{m}_k = \overset{i}{U}_0\,\overset{0}{(1)}_k + \overset{i}{U}_1\,\overset{2}{(1)}_k + \overset{i}{U}_2\,\overset{3}{(1)}_k + \ldots.. \overset{i}{U}_n\,\overset{n}{(1)}_k,$$

será preciso repetir mayor ó menor número de veces la reducción de m, según el valor de este número m: luego los valores de U, que se forman por *combinaciones repetidas de estas ecuaciones*, serán distintos según el número de estas combinaciones. Además, la m entra en las (θ); éstas en las (Φ); y éstas en las U, según hemos dicho.

De aquí resulta que, al menos *à priori*, debe suponerse que el segundo miembro de cada ecuación (4), varía á medida que m crece. Varía y disminuye: puesto que los primeros miembros, A, tienden todos hacia cero.

Pero también los términos de una serie convergente tienden á cero y ninguno lo es: de suerte que hasta ahora no hay derecho para decir que los segundos miembros de las ecuaciones (4) sean *rigorosamente nulos*, por grande que sea m; sino que tienden hacia cero.

Para salvar esta dificultad, emplea M. Lindemann el siguiente artificio y las siguientes consideraciones.

Un miembro cualquiera del grupo (4) es una función entera de las N y las u. Las N son números enteros, reales ó imaginarios; y las u son funciones enteras de las U y de las φ. Las U por su composición son funciones enteras de las Φ: de suerte que, apurado el asunto, los segundos miembros de las ecuaciones (4) son funciones enteras y de coeficientes enteros de las φ y de las Φ. Pero las Φ (y por lo tanto las φ que son casos particulares de ellas) son funciones enteras de las θ, que á su vez lo son de los coeficientes de la ecuación primitiva, que en este caso es la Ψ, y de las raíces de ésta.

En último análisis los segundos miembros de las ecuaciones (4) son funciones enteras de las raíces de $\Psi = 0$ (que son todas las del grupo (2)), y además sus coeficientes son números enteros, reales ó imaginarios.

Veamos cómo varían, cuando se cambian entre sí, las raíces $z_1, z_2, z_3 \dots z_p$ de $\psi = 0$; y veámoslo para deducir si son ó no funciones simétricas de estas raíces.

Imaginemos que se cambian las dos raíces z_r y z_s una por otra: *primero*, en la primera ecuación del grupo (4); y *segundo*, en las restantes.

Primero: en la ecuación

$$A_0 = -\left[N_0 u_0^0 + N_1 \Sigma u_k^0 + N_2 \Sigma u_{(Z_2)}^0 + \dots\dots \right]$$

el índice superior es *cero:* es decir, que, en vez de una raíz de $\Psi = 0$, entrará $X_0 = 0$: no variará, pues, sea cual fuere el cambio entre z_r y z_s. Además, en un grupo cualquiera $N_h \Sigma u_{(Z_h)}^0$ entran todas las raíces Z'_h, Z''_h, $Z'''_h \dots\dots Z_h^{(p_h)}$ de la ecuación $S_h = 0$, de la suma de las raíces de la propuesta: á saber, en cada término de Σ y en cada u, una de estas raíces. Y, una de dos: ó las dos raíces que se cambian, z_r y z_s, entran en una misma Z_h, ó no entra más que una. En el primer caso

$$z_1 + \text{——} + z_r + \text{——} + z_s \text{——} \text{etc.},$$

es exactamente lo mismo, pues sólo se trata de sumas, que esta otra: $z_1 + \text{——} + z_s + \text{——} + z_r \text{——}$ etc.:

por lo tanto Z_h no ha variado, ni $u_{Z_h}^0$. Y en el segundo caso á una raíz Z_h, en que entre z_r, corresponderá precisamente otra que sólo difiera de ella en que entrará z_s, siendo las demas z las mismas: es decir, que en Σ habrá dos (u), correspondientes á dos Z, de esta forma:

primera Z: $\text{——} + z_r + \text{——}$; y

segunda Z: $\text{——} + z_s + \text{——}$:

representando con los trazos rectos sumas de series de raíces (z).

El cambio de z_r por z_s y viceversa convierte estos dos términos en

$$—— + z_s + ——, \text{ y}$$

$$—— + z_r + —— :$$

de suerte que dicho cambio no produce otro efecto que cambiar unas Z de $\Sigma u^{0}_{(Z_h)}$ por otras, y, por consiguiente, unos términos de cada Σ por otros.

Como esto mismo puede decirse de todas las Σ de la primera ecuación del grupo (4), resulta, que el segundo miembro de dicha ecuación es una función entera y simétrica de las raíces z_1, z_2, ... z_p, de $\Psi = 0$, y que por lo tanto es *un número entero*.

Pero *un número entero*, que decrece sin límite, aproximándose á *cero*, es *rigorosamente nulo:* luego el segundo miembro, e la primera ecuación del grupo (4), es igual á *cero*.

Segundo. En las demás ecuaciones, cada término de cualquiera de las *sigmas*, contiene *u* con índice y subíndice: de manera, que en cada Σ las raíces Z_h, y por lo tanto las z, entran de dos modos distintos, según determina la composición de las *u*.

Respecto á las Z_h que entran, por razón del índice inferior, en cada Σ de cualquier ecuación del grupo (4), por ejemplo en $N_h\ \Sigma\ u^{i}_{(Z_h)}$, podemos repetir todo lo dicho para la primera ecuación: el cambio de z_r por z_s y viceversa, ó no altera á Z_h, ó cambia una Z por otra, y por lo tanto un término u de la Σ por otro; así el cambio de las Σ sólo depende de las *i*.

En cuanto á las raíces Z, que entren por razón del índice *i*, puede repetirse respecto á ellas lo dicho para el subíndice Z_h: ó z_r y z_s entrarán á la vez en la Z que corresponda al índice *i*, ó no entrará ninguna, ó entrará una sola. *Si lo primero*, la Z será de la forma,

$$—— + z_r —— + z_s + ——$$

y el cambio la convertirá en

$$—— + z_s —— + z_r + ——$$

que es lo mismo, pues se trata de una suma.

Si lo segundo, ni Z ni u variarán.

Y si lo tercero, la raíz Z, que corresponde al índice *i* será de la forma, —— + z_r + ——.

Pero como el índice *i* varía de 0 á P, es decir, como hay una ecuación por cada raíz del grupo (2), habrá otra ecuación del grupo (2), cuyo índice *i* corresponderá á otra raíz de la misma ecuación $S_h = 0$, distinta de la anterior sólo por el cambio de z_r por z_s; es decir, —— + z_s + ——. De aquí resulta, que ambas raíces Z_h se cambiarán en esta forma:

la primera será —— + z_s + ——, y

la segunda —— + z_r + ——.

Y como otro tanto puede decirse de todos los términos de dichas dos ecuaciones, resulta, por último, que el cambio de z_r por z_s y el inverso no producen otro efecto, sino el de cambiar á lo sumo un segundo miembro de (4) por otro y viceversa.

Esto no prueba todavía que los segundos miembros de (4) sean números enteros, pues, exceptuada la primera ecuación, todas las demás se alteran cuando se cambian las raíces z entre sí.

Pero si se forma una ecuación,

$$\omega^{P+1} + B_1 \omega^{P} + B_2 \omega^{P-1} + \ldots\ldots B_P = 0,$$

cuyas raíces sean los segundos miembros de (4) (en rigor podría exceptuarse al primero), como B_1, B_2... son funciones simétricas de dichos segundos miembros, y éstos á lo más se cambian entre sí por el cambio de las z, resulta que B_1, B_2... son funciones simétricas de z_1, z_2, z_3... z_p, y que por lo tanto son *números enteros*.

Ahora bien, todos los segundos miembros de (4) disminuyen indefinidamente y otro tanto podremos decir de B_1, B_2, B_3...; y, como estos son enteros, resulta por fin que son, al menos para valores bastante grandes de m, exactamente *nulos*.

Otro tanto se deducirá para los segundos miembros, puesto que la ecuación en ω se reduce á

$$\omega^{P+1} = 0.$$

Tendremos, pues, las $P + 1$ ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}
N_0 u_0^{0} + N_1 \Sigma u_k^{0} + N_2 \Sigma u_{(Z_2)}^{0} + N_3 \Sigma u_{(Z_3)}^{0} + \dots + N_p \Sigma u_{(Z_p)}^{0} = 0, \\
N_0 u_0^{1} + N_1 \Sigma u_k^{1} + N_2 \Sigma u_{(Z_2)}^{1} + N_3 \Sigma u_{(Z_3)}^{1} + \dots + N_p \Sigma u_{(Z_p)}^{1} = 0, \\
N_0 u_0^{(2)} + N_1 \Sigma u_k^{(2)} + N_2 \Sigma u_{(Z_2)}^{(2)} + N_3 \Sigma u_{(Z_3)}^{(2)} + \dots + N_p \Sigma u_{(Z_p)}^{(2)} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
N_0 u_0^{(P)} + N_1 \Sigma u_k^{(P)} + N_2 \Sigma u_{(Z_2)}^{(P)} + N_3 \Sigma u_{(Z_3)}^{(P)} + \dots + N_p \Sigma u_{(Z_p)}^{(P)} = 0,
\end{array}\right\} (5).$$

Antes de pasar adelante, observemos que siempre hemos hablado de Z; pero en esta denominación se halla comprendida z: lo mismo da Z, para las consideraciones que preceden, que z: ambas son raíces de $\Psi = 0$ y pertenecen al cuadro (2). Esta observación se aplica á todo lo que sigue.

En el cuadro (5) hay $P + 1$ ecuaciones, y, desarrollando las Σ, hay también $P + 1$ términos: la N y las u forman matrices cuadradas de $(P + 1)^2$ término, en las que las *u* son las de la matriz Δ de Hermite, por su doble entrada de índices y subíndices, para todas las raíces de $\Psi = 0$, ó sea para todas las cantidades del cuadro (2).

Tomando las N por incógnitas y las u por coeficientes, puesto que los segundos miembros son *nulos*, la determinante de u, es decir Δ, debe ser nula: de lo contrario los valores de N serían todos iguales á *cero*, cuando son *números enteros determinados*, al menos algunos: los de la relación *lineal supuesta* (3'). Esto mismo podría probarse tomando las determinantes menores.

Pero $\Delta=\delta^{2m}$; y, siendo $\Delta=0$, resulta $\delta=0$.

δ es la determinante

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots & 1 \\ z_o & \ldots\ldots & z_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_o^n & \ldots\ldots & z_n^n \end{vmatrix}=0$$

del teorema de Hermite, que en nuestro caso es la determinante correspondiente de las raíces de $\Psi=0$, ó sea del cuadro (2), en la cual n es P.

Sabemos que δ es el producto de todas las diferencias de las raíces Z, tomadas dos á dos; pero δ es *cero:* luego una de estas diferencias por lo menos, por ejemplo Z_h-Z_h', es nula también, es decir, $Z_h=Z_h'$: lo cual es imposible, porque Z_h es raíz de la ecuación irreducible $S_h=0$, y Z_h', es raíz de la ecuación irreducible $S_h=o$: resultado absurdo, decimos, por que dos ecuaciones irreducibles distintas no pueden tener una raíz común. En rigor, esto es contrario á la hipótesis de que en el cuadro (2) no hay dos raíces iguales; y con esto basta para demostrar lo absurdo de la consecuencia y la imposibilidad de la relación lineal (3').

Restricciones. Para la demostración precedente hemos puesto varias restricciones á la generalidad de los razonamientos.

1.ª Que las ecuaciones de las sumas dos á dos, $S_2=0$; tres á tres, $S_3=0$; etc., son irreducibles. (La $\psi=0$ claro es que es irreducible por hipótesis).

2.ª Que ninguna de las ecuaciones $S_2=0$, $S_3=0$, $S_4=0$, etc., tiene raíces iguales. La propuesta $\psi=0$ claro es también que no las tiene.

3.ª Que ninguna raíz de una de las ecuaciones

$$\psi=0,\ S_2=0,\ S_3=0,\ S_4=0\ldots$$

puede ser igual á otra raíz de otra de dichas ecuaciones.

Primera. Si las ecuaciones $S_2=0$, $S_3=0$, $S_4=0$... no son irreducibles, pero subsisten las demás restricciones, el método de demostración es el mismo que en el caso general, y las ecuaciones (4) las mismas, refiriéndose cada *sigma* á todas las raíces de una de las ecuaciones $S_2=0$, $S_3=0$. etc. El resultado final será idéntico al ya obtenido: es decir, que obtendremos dos Z iguales, que no pueden serlo por hipótesis, y además por ser raíces de dos ecuaciones irreducibles distintas, $S'_h=o$ y $S'_k=o$. Estas no serán ya de la serie $\psi=0$, $S_2=0$, $S_3=0$, etc.; sino las componentes irreducibles de éstas. De todas maneras da lo mismo.

Segunda. Supongamos que una de las ecuaciones $S_h=0$ tienen raíces iguales, por ejemplo:

$$S_h=\left(S'_h\right)^q . S''_h=0,$$

siendo $S'_h=0$ y $S''_h=0$ ecuaciones irreducibles sin raíces iguales. Lo que digamos de este caso diríamos de otro cualquiera análogo, ya para ésta, ya para varias ecuaciones (S) en iguales condiciones.

Es preciso, para mayor claridad, modificar ligeramente el prodecimiento en esta nueva hipótesis.

La ecuación $\Psi=0$, á que se aplica la relación de Hermite, no será

$$\psi . S_2 . S_3 . S_4 \ldots S_h \ldots S_p=\psi . S_2 . S_3 \ldots \left(S'_h\right)^q S''_h \ldots S_p=0,$$

sino esta otra,

$$\psi . S_2 . S_3 \ldots S'_h . S''_h \ldots S_p=\Psi=0, \quad (6)$$

que tiene las mismas raíces que la anterior, pero que sólo contiene una vez cada una de las raíces de $S'_h=0$, en vez de procedimiento en esta contenerlas q veces.

El método de demostración es idéntico al ya empleado.

Se aplicará la ecuación general de Hermite

$$e^{z_k} m_k^i=e^{z_k} u_o^i-u_k^i$$

á cada una de las raíces de las ecuaciones irreducibles

$$\psi=0,\ S_2=0,\ S_3=0, \ldots S'_h=0,\ S''_h=0 \ldots S_p=0$$

respecto al índice k, dejando i indeterminado, pero repitiendo q veces las ecuaciones relativas á las raíces de $S'_h=0$; después se sumarán por grupos, de suerte que cada Σ comprenda los términos correspondientes á cada una de las ecuaciones

$$\psi=0,\ S_2=0,\ S_3=0\ldots\ S_h=0\ldots\ S_p=0;$$

y así obtendremos una ecuación idéntica á la (3'').

Por último, haremos variar el índice i de suerte que corresponda á las raíces de la nueva ecuación $\Psi=0$ (6), cuidando de repetir q veces la que se refiera á una de las raíces iguales. De esta manera obtendremos un cuadro de la misma forma que el (4), sin más que estas diferencias: 1.ª, que cada término $N_h\ \Sigma\ u^i_{(Z_h)}$ en rigor será de esta forma

$$N_h\left(q\,\Sigma\,u^i_{(Z'_h)}+\Sigma\,u^i_{(Z''_h)}\right)$$

refiriéndose la primera *sigma* á los términos correspondientes á las raíces sencillas de $S'_h=0$ y la segunda á las de $S''_h=0$; y 2.ª que cada ecuación, correspondiente á un valor de i, propio de una raíz múltiple, estará repetida q veces: habrá, pues, q grupos iguales.

Todo lo demás es repetición del método general.

Al formar la determinante del grupo (4), de los q grupos iguales, sólo se tomará uno, con lo cual se disminuirá el número de horizontales; pero en cambio se disminuirá en otro tanto el de verticales, porque el término correspondiente á $S_h=0$, ya hemos visto que puede ponerse bajo la forma

$$N_h\left(q\,\Sigma\,u^i_{(Z'_h)}+\Sigma\,u^i_{(Z''_h)}\right)$$

para cada valor de i.

La matriz de las u distintas, siempre será cuadrada,